SUMMA CUM LAUDE

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

고등 수학 (상)

이룸이앤비
Education & Books

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

INTRODUCTION

[이 책을 펴내면서]

어떻게 하면 수학을 보다 쉽게 느끼게 할까?
이는 우리 저자들이 이 책을 집필하게 된 가장 중요한 계기입니다. 기존의 책들이
매우 간단하게 개념 설명만을 한 뒤 문제 풀이 위주로 수학을 설명하고 있기 때문에
수학은 그저 어렵고 까다로운 것으로만 느껴지게 되었습니다.

그래서 우리 저자들은 기존 책들과는 다른 방식으로 수학을 설명하고
기존의 책에서는 숨겨 놓은 아이디어들을 숨김없이 드러내고자 노력하였습니다.
상세한 설명과 저자들의 경험에서 우러나온 충고들은 수학에 어려움을 가진
독자라 하더라도 고등학교 수학을 제대로 이해할 수 있도록 할 것입니다.
또한 수학 실력이 좋은 독자에게는 교과서나 참고서 등을 풀어 보면서
막연히 생각했던 아이디어를 체계적이고 깊이 있게 이해하도록 도움을 줄 것입니다.
관련된 개념들을 통해 충분히 이해할 수 있도록 설명하였기 때문에,
교과서와 이 책 한 권이면 수학의 개념을 스스로 공부하는 데 어려움이 없을 것이라 믿습니다.

수학도 일종의 언어입니다. 한글 대신 수학 기호를 이용해 의미를 전달하고 소통하는 것입니다.
때문에 수학을 제대로 읽고 쓰기 위해서는 하나의 낯선 언어를 배우는 것만큼의 노력을 해야 합니다.
손으로 많이 쓰고 많이 생각해야 하는 학문이므로, 수학(數學)이 아닌 수학(手學)이라고 해도 어색하지 않습니다.
특히 고1 대상의 수학(상), 수학(하)는 고2, 고3 과정 수학의 초석이 된다는 점에서 매우 중요합니다.
여기에서 나오는 수학의 기호나 용어들이 앞으로 공부할 단계에서도 계속 등장하기
때문에 이 책에서 다룬 수학 개념을 잊거나, 알긴 알더라도 문제에 적용하는 데 익숙하지 않다면
앞으로 수학 공부에 흥미를 갖게 되기는 쉽지 않을 것입니다. 따라서 많이 써보고 많이 생각해 보면서
이 책을 읽어나가길 바랍니다. 이 책을 다 보았을 즈음엔, 숫자와 기호와 문자로 이루어진
재미있는 수학 이야기를 읽었다는 느낌을 받을 수 있고, 더 나아가 스스로
그 이야기를 써낼 수도 있게 될 것입니다.

부디 그 수준이 될 때까지 수학에 흥미를 잃지 않길 바라며,
이 책이 모든 학생들이 수학에 흥미를 갖게 되는 시금석이 되기를 간절히 기원합니다.

– 저자 일동 –

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

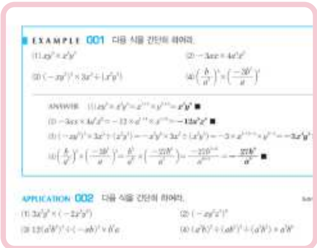
STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]


01 단항식과 다항식
SUMMA CUM LAUDE
ESSENTIAL LECTURE

01 개념 학습

수학 학습의 기본은 개념에 대한 완벽한 이해입니다. 단원을 개념의 기본이 되는 소단원으로 분류하여, 기본 개념을 확실하게 이해할 수 있도록 설명하였습니다. 〈공식의 정리〉와 함께 〈공식이 만들어진 원리〉, 학습 선배인 〈필자들의 팁〉, 문제 풀이시 〈범하기 쉬운 오류〉 등을 설명하여 확실한 개념 정립이 가능하도록 하였습니다.


EXAMPLE 001
APPLICATION 002

02 EXAMPLE & APPLICATION

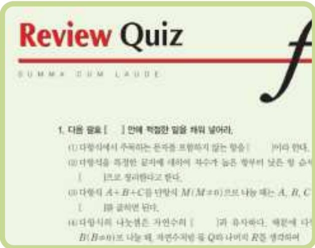
소단원에서 공부한 개념을 적용할 수 있도록 가장 적절한 〈EXAMPLE〉을 제시하였습니다. 다양한 접근 방법이나 추가 설명을 통해 개념을 확실하게 이해하고 넘어가도록 하였습니다. EXAMPLE에서 익힌 방법을 적용하거나 응용해 봄으로써 개념을 탄탄하게 다질 수 있도록 APPLICATION을 제시하였습니다.


001
GUIDE
SOLUTION
006
GUIDE
SOLUTION

03 기본예제 & 발전예제

탄탄한 개념이 정리된 상태에서 본격적인 수학 단원별 유형을 익힐 수 있습니다. 대표적인 유형 문제를 〈기본예제〉와 〈발전예제〉로 구분해 풀이 GUIDE와 함께 그 해법을 보여 주고, 같은 유형의 〈유제〉 문제를 제시하여 해당 유형을 완벽하게 연습할 수 있습니다. 또, 〈Summa's advice〉에 보충설명을 제시하여 실수하기 쉬운 사항, 중요한 추가적인 설명을 덧붙여 해당 문항 유형에 철저하게 대비할 수 있도록 하였습니다.

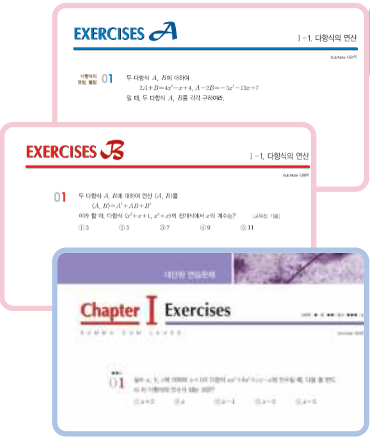
숨마쿰라우데® [수학(상)]


Review Quiz

SUMMA CUM LAUDE

04 중단원별 Review Quiz

소단원으로 나누어 공부했던 중요한 개념들을 중단원별로 모아 괄호 넣기 문제, 참 · 거짓 문제, 간단한 설명 문제 등을 제시하였습니다. 이는 중단원별로 중요한 개념을 다시 한번 정리하여 전체를 보는 안목을 유지할 수 있도록 해 줍니다.

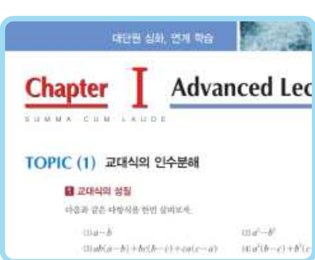

EXERCISES A

EXERCISES B

Chapter I Exercises

05 중단원별, 대단원별 EXERCISES

이미 학습한 개념과 유형문제들을 중단원과 대단원별로 테스트하도록 하였습니다. 〈난이도별〉로 A, B단계로 문항을 배치하였으며, 내신은 물론 수능 시험 등에서 출제가 가능한 문제들로 구성하여 정확한 자신의 실력을 측정할 수 있습니다. EXERCISES를 통해 부족한 부분을 스스로 체크하여 개념 학습으로 피드백하면 핵심 개념을 보다 완벽히 정리할 수 있습니다.


대단원 심화, 연계 학습

Chapter I Advanced Lec

TOPIC (1) 교대식의 인수분해

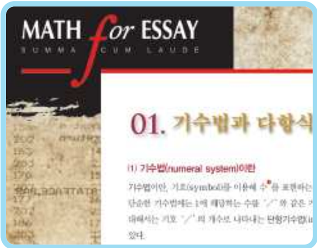
06 Advanced Lecture(심화, 연계 학습)

고1의 학습 단계인 수학(상), 수학(하)는 고등학교 수학의 끝이 아니며, 앞으로 배울 내용들의 기본이 되는 학습 단계입니다. 이 부분에서는 앞으로 학습할 상위 단계의 내용과 연계된 내용을 제시하고 있습니다. 특히 고1 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 설명하여 수학 실력이 보다 향상될 수 있도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

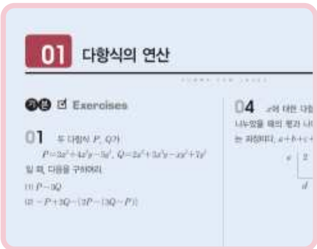
STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]



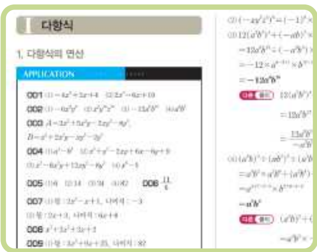
07 MATH for ESSAY

고1 수준에서 연계하여 공부할 수 있는 수리 논술, 구술에 관련된 학습 사항을 제시하였습니다. 앞의 심화, 연계 학습과 더불어 좀 더 수준 있는 수학을 접하고자 하는 학생들을 위해 깊이 있는 수학 원리 학습은 물론 입시에서 강조되는 〈수리 논술, 구술〉에도 대비할 수 있도록 하였습니다.



08 내신 · 모의고사 대비 TEST

수학 공부에서 많은 문제를 접하여 적응력을 키우는 것은 원리를 이해하는 것과 함께 중요한 수학 공부법 중 하나입니다. 이를 위해 별도로 단원별 우수 문제를 〈내신 · 모의고사 대비 TEST〉를 통해 추가로 제공하고 있습니다. 단원별로 자신의 실력을 측정하거나, 중간 · 기말 시험 및 각종 모의고사에 대비하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.



09 SUB NOTE – 정답 및 해설

각 문제에 대한 좋은 해설은 문제풀이 만큼 실력 향상을 위해 필요한 요소입니다. 해당 문제에 대해 가장 적절하고 쉬운 풀이 방법을 제시하였으며, 알아두면 도움이 되는 추가적인 풀이 방법 역시 제시하여 자학자습을 위한 교재로 손색이 없도록 하였습니다.

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

숨마쿰라우데® [수학 (상)]

CHAPTER Ⅰ. 다항식

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅱ. 방정식과 부등식

CONTENTS

CHAPTER Ⅲ. 도형의 방정식

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STUDY SYSTEM

[수학 학습 시스템]

쉽고 상세한 **개념 설명**과
엄선된 **1,600여 문항**으로
최고의 학습 효율을
제공합니다.

개념

단원 개념 학습 단계

EXAMPLE
APPLICATION

유형

필수 유형 학습 단계

기본, 발전예제
유제

정리

단원 학습 정리 단계

중단원별 Review Quiz
중단원별 EXERCISES
대단원별 Exercises

평가

최종 실력 테스트 단계

내신 · 모의고사 대비 TEST

심화 · 연계

심화, 연계 학습 단계

Advanced Lecture
MATH for ESSAY

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

수학 공부법 특강

상위 1%를 향한 기적의 수학 학습법

www.erumenb.com

"폐하, 학문에는 왕도(王道)가 없습니다." 이것은 유클리드가 프톨레마이오스 왕에게 기하학을 가르치며 한 말이다. 필자는 이 말을 때때로 떠올릴 정도로 좋아한다. 공부에는 속임수도, 조작도 없다는 말, 충실하게 끈기를 가지고 공부한 자에게 상이 돌아간다는 말이기 때문이다. 이 말은 수학에도 그대로 적용되어 '열심히 공부하면 수학 점수를 올릴 수 있으리라.'는 희망을 품게 한다. 그런데 여기서 꼭 염두에 두어야 할 것이 있으니, 바로 '단순하게 열심히'가 아니라 올바른 방법, 즉 정도(正道)에 따라 공부해야 한다는 것이다.

고등학생이면 누구나 공부하고 있다. 누구나 열심히 하고 있다고 말한다. 그런데 누구는 성적이 잘 나오고 누구는 안 나온다. 이쯤 되면 성적이 안 나오는 학생들은 "수학은 재능 있는 학생들이나 할 수 있는 거야!"라면서 포기하려고 한다. 무엇이 문제일까?

바로 정도(正道)인가 아닌가의 문제이다.

이 책을 보고 있을 대다수 학생들은 아직 수학을 공부하는 정도(正道)를 잘 모를 것이다. 여기에 소개한 방법들은 경험에서 우러나온 것으로 실현 가능성이 충분히 높으니 이를 토대로 자신만의 공부법을 완성해 보길 바란다. 지면상 소개할 방법은 몇 가지에 불과하다. 하지만 필수적인 것이기에 이를 실천에 옮기면 효과는 기대 이상일 것이다.

정도 1 외울 것은 철저하게 외우고, 이해할 것은 철저하게 이해하라.

수학은 **정의(定意)**를 바탕으로 **추론(追論)**을 이끌어내고, 추론을 바탕으로 **정리(定理)**를 만들어내는 학문이다. 즉, 논의의 출발점이 되는 정의는 이해해야 할 뿐만 아니라 정확히 암

기해야 하며, 정의에서 추론을 거쳐 정리가 유도되는 과정은 집요하게 물고 늘어져서 그 과정을 정확하게 이해하고, 스스로의 힘으로 그 과정을 기술할 수 있도록 연습해야 한다. 하지만 안타깝게도 많은 학생들은 **정의**를 볼 때는 '수학은 이해가 중요하다지. 이런 건 안 외워도 될 거야.'라고 생각하고, **정리**가 유도되는 과정을 볼 때는 '너무 어렵다. 이해가 안 되더라도 무작정 외우다 보면 어느 순간 이해가 된다고 어디서 들은 거 같아. 그냥 외우자.'며 공식만을 무작정 외운다. 바로 이 잘못된 습관 때문에 번번이 수학에 발목이 잡혔던 것이다. 「숨마쿰라우데 수학 시리즈」는 외워야 하는 부분과 이해해야 하는 부분을 정확히 구별시켜 주는 데 중점을 두고 집필되었다. 이 책을 통해 잘못된 암기와 이해의 경계가 바로 잡히길 바란다.

정도 2 개념 정리와 문제 풀이 사이의 시간의 텀(term)을 최소화하라.

개념 정리가 머릿속에 **입력**(input)하는 과정이라면, 문제를 푸는 것은 배운 것을 **출력**(output)하는 과정이다. input과 output은 항상 동시에 이루어져야 한다. 하지만 필자의 경험으로 볼 때 output 과정을 연습하는 것은 input 과정보다 몇 배로 힘들다. input은 편하게 강의를 듣거나 책을 읽기만 하면 되지만, output은 강의나 책에서 보았던 내용을 스스로의 힘으로 이끌어 내어야 하기 때문이다. 그러다 보니 많은 학생들은 힘든 과정인 output보다는 평이한 과정인 input 중심으로 학습 계획을 세우게 된다. '이번 시험 범위가 1~3단원이지. 일단 1~3단원까지 기본서를 쭉 다 읽어본 다음에 문제집을 풀어야지.'라는 식으로 계획을 세우는 경우가 많다. 그리고 이러한 방식으로 공부를 했던 학생들의 대부분은

'기본서 뒷부분을 볼 때쯤 되니 앞부분에서 무엇을 공부했는지 기억이 안 나요.'

'난 분명히 개념 정리를 했는데, 문제를 풀려고 하니 뭘 배웠는지 생각이 안 나요.'

하는 기억상실 증상을 보이는 경우가 많다. 한 단원의 개념을 정리했다면 그 단원의 내용들을 잊어버리기 전에 해당 단원의 문제들을 많이 풀도록 하자. 개념 정리와 문제 풀이 사이의 간격이 길어질수록 비효율적인 공부가 될 가능성이 크기 때문이다.

수학(數學)은 수학(手學)이기도 하다.

손 연습이 바탕이 되지 않는 수학 공부는 사상누각(沙上樓閣)이다.

정도 3 배운 것을 하나로 모으는 습관, 노트 정리가 답이다.

많은 학생들이 신학기가 되면 노트 정리를 시도하지만 한 달쯤 지나면 슬그머니 정리를 포기하곤 한다. 노트 정리가 중요하다는 말은 어디서 들은 거 같은데, 구체적으로 정리란 것을 어떻게 해야 하는지에 대해서는 들어본 적이 없기 때문일 것이다.

노트를 정리한다는 것은 요점을 정리한다는 것이다. 즉, 노트 정리를 할 때는 시시콜콜하게 모든 내용을 적을 필요는 없다. 그러다 보면 금방 지쳐버리게 되고, 노트의 효율도 떨어지게 된다. 노트 정리의 핵심 원칙은 다음과 같다.

❶ 노트를 정리할 때 이미 알고 있는 내용은 적지 말고, 빈칸으로 남겨 놓자.

이미 알고 있는 내용을 또다시 적다 보면 적지 않은 시간이 낭비될뿐더러, 아픈 팔을 붙잡고, '내가 이것을 통해 무엇을 얻었지?'라는 회의가 들면서 결국 노트 정리를 포기하게 된다. 따라서 이미 알고 있는 내용들은 노트에 적지 말자. 대신 빈칸으로 남겨놓고, 노트의 빈칸을 볼 때마다 '이곳에 들어가야 할 것이 무엇인가?'를 떠올리도록 하자. 필자의 중학교 2학년 때 수학 선생님은 '시험 기간이 되면 항상 목차를 펴고, 그동안 공부했던 내용을 머릿속으로 쭉 정리했다.'라는 자신의 공부 경험을 이야기해 주시곤 했다. 필자가 그동안 공부한 기억을 되살려보더라도 이것은 효율적인 공부법 중 하나이다. 머릿속의 지식을 끄집어내어 노트의 빈칸을 채워나가는 것 또한 마찬가지이다.

❷ 내가 시험장에서 만났을 때 실수할 것만 같은 내용들, 문득 공부를 하다가 갑자기 깨닫게 된 내용들을 노트에 적어야 한다.

당장 아픈 곳은 배인데, 종합 영양제를 먹으면서 체력을 튼튼하게 하는 사람은 없다. 공부도 이와 마찬가지이다. 시험이란 점수를 깎으려는 출제자와 만점을 쟁취하려는 수험생의 대결로 볼 수 있다. 즉, 시험을 코앞에 두고 공부할 때는 약점들을 집중적으로 공략하고 보강해야 한다. 평소에 조금씩 자신의 약점이 무엇인지 노트를 통해 정리하는 습관을 들이자. 시험 때 상당한 도움이 될 것이다.

❸ 한술 밥에 배부를 수 없다.

필자는 굉장히 치밀하고 꼼꼼하게 정리된 노트를 몇 권 가지고 있다. 필자의 노트를 보고 자극을 받아서 노트 정리를 시작했다가 생각처럼 근사하게 만들어지지 않자, 제풀에 지쳐서 노트 정리를 포기하는 학생을 종종 보곤 한다. 모든 공부가 마찬가지겠지만 어느 정도의 내공이 쌓였을 때서야 비로소 그 과목을 다양한 각도로 분석할 수 있다. 즉, 처음 공부를 시작하는 입장에서 완벽한 노트 정리를 하기란 쉽지 않다. 조급해하지 말고 평소에 조금씩 노트 정리를 하는 습관을 들이도록 하자. 로마가 하루아침에 만들어진 것이 아닌 것처럼, 멋진 정리 노트 또한 하루아침에 만들어질 수 없다. 거북이처럼 느리더라도 한 걸음씩 나아가는 사람이 승리한다는 사실을 명심하자.

정도 4 틀린 문제를 재음미하는 습관을 들여라.

상당수의 학생들은 틀린 문제를 반복하여 틀리는 경향이 있다. 이것은 그저 틀린 문제의 해설을 한 번 훑어보는 정도로는 자신의 실력 향상에 도움이 되지 않는다는 뜻이다. 틀린 문제는 오랜 시간 곱씹어 보면서 문제 해결의 핵심이 무엇이고, 내가 약했던 부분이 무엇이었는지를 꼼꼼하게 정리해주어야 한다. 다음은 수학 문제를 푸는 데 요구되는 사고 과정을 편의상 세 가지로 구분한 것이다. 이를 참고하여 틀린 문제를 볼 때는 항상 어느 부분이 부족했던 것인지 정확하게 체크하고 노트의 해당 부분에 추가하여 적는 습관을 들이도록 하자.

(1) 단순히 개념을 묻는 문제인가?	기본서에 나온 정의, 개념, 증명 등 수학 문제를 풀기 위한 밑천이 되는 부분에 관한 문제인지 살핀다. 기본을 모르고서야 발전해 나갈 수 없다.
(2) 문제의 핵심을 꿰뚫었는가?	틀린 문제의 해설을 볼 때 '아, 이렇게 간단한 것을……' 하며 아쉬워하는 경우가 종종 있다. 어째서 아는 내용인데도 풀지 못하는 것일까? 그것은 머릿속에 입력시킨 내용을 적절한 상황에 맞게 끄집어내지 못했기 때문이다. 수학 문제를 풀 때는 제시된 조건을 읽어 내려가면서 이 문제가 무엇을 묻고 싶어 하는지 자신이 배운 지식과 연관 지어서 해석해내는 능력이 필요하다.
(3) 전략을 바르게 세웠는가?	문제를 많이 풀다 보면 다음과 같이 경험적으로 얻게 되는 요령들이 있다. 이러한 요령들이 해결 전략으로 큰 몫을 한다. "두 개 이상의 조건이 변하고 있을 때는 일단은 하나를 고정시키고 생각해 보자." "문제의 뜻이 이해되지 않을 때는 구체적인 숫자를 대입해서 문제가 시키는대로 해 보자." "변하지 않는 요소를 기준으로 살피자." "아주 극단적인 경우 혹은 아주 일반적인 경우가 답이다."

정도 5 문제를 푸는 스킬을 찾기 전에는 해설을 보지 마라.

문제가 안 풀린다고 덜컥 해설을 보면 실력이 늘지 않는다. 문제가 풀리지 않을 때는 일단 그 문제를 접어놓았다가 하루 혹은 이틀 정도 지난 뒤에 다시 도전해 보자. 그러면 대부분 예전보다 쉽게 풀리는 것을 느낄 수 있을 것이다. 또한, 하나의 문제에 있어서 다양한 풀이를 생각해 보자. 상위권으로 도약하기 위해서 반드시 필요한 과정이다. 출제자와 선의의 경쟁을 한다는 마음으로 자신의 풀이와 해설의 풀이 중 어느 것이 효율적인지를 비교해 보자. 이 외에도 여러 가지 방법이 있겠지만 무엇보다 중요한 것은 하고자 하는 마음이다. 그 마음으로 지금 이 순간부터 시작한다면 분명 어제보다 나은 오늘의 나를 발견하게 될 것이다.

CHAPTER I
다항식

숨마쿰라우데®
[수학 (상)]

INTRO to Chapter Ⅰ

다항식

SUMMA CUM LAUDE

나비가 날아다니는 경로를 수식으로 표현할 수 있을까? 자연, 우주, 미래 현상들을 설명하는 데 수식만큼 명료한 것은 없다. 일단 수식으로 표현이 된다면 보다 빨리 그 현상을 파악하고 이후 상황에 대한 예측도 가능하기 때문이다.

본 단원의 구성에 대하여...

Ⅰ. 다항식	1. 다항식의 연산	01 단항식과 다항식 02 다항식의 덧셈, 뺄셈과 곱셈 03 곱셈 공식 04 다항식의 나눗셈 05 조립제법 ● Review Quiz ● EXERCISES
	2. 나머지 정리와 인수분해	01 항등식과 미정계수 02 나머지정리 03 인수분해 ● Review Quiz ● EXERCISES
	● **대단원 연습문제** ● **대단원 심화, 연계 학습** TOPIC (1) 교대식의 인수분해 ● **논술, 구술 자료** 01. 기수법과 다항식의 표현	

새로운 언어를 공부하는 마음으로

누군가와 의사소통을 하기 위해서 자신의 생각을 말과 글, 즉 언어로 표현(expression)하는 것은 매우 중요하다. 내 생각이 아무리 고귀하고 대단하더라도 표현하지 못하면 전달되지 않기 때문이다. 따라서 우리는 매일같이 자신의 생각을 표현하고 남이 표현한 생각을 이해하기 위해 노력하며 살게 된다. 게다가 국제어가 아닌 언어를 모국어로 하고 있어서 적어도 고등학교를 졸업할 때까지는 영어도 익혀야 한다. 그만큼, 언어와 표현은 우리의 일상에서 떼어놓을 수 없다.

01 단항식과 다항식

ESSENTIAL LECTURE

1 단항식과 다항식

(1) 단항식 : 수와 문자 간에 곱셈만을 이용해 표현한 식

(2) 다항식 : 단항식 또는 단항식의 합으로 표현한 식

2 다항식에 관련된 여러 가지 용어

어떤 문자(주목하는 문자)에 대한 다항식에서

(1) 항 : 다항식을 이루고 있는 각 단항식

(2) 상수항 : '주목하는 문자'를 포함하지 않는 항

(3) 특정 항의 계수 : 특정 항에서 '주목하는 문자'를 제외한 나머지 부분

(4) 특정 항의 차수 : 특정 항에 곱해져 있는 '주목하는 문자'의 개수(상수항의 차수는 0으로 정의한다.)

(5) 다항식의 차수 : 다항식을 정리했을 때 각 항의 차수 중 가장 큰 차수

[주의] 항, 상수항, 계수 등은 반드시 그 부호까지 함께 생각해 주어야 한다.

3 다항식의 정리

(1) 내림차순 : 차수가 높은 항부터 낮은 항 순서로 다항식의 각 항을 나열

(2) 오름차순 : 차수가 낮은 항부터 높은 항 순서로 다항식의 각 항을 나열

1 단항식과 다항식

단항식(monomial)과 다항식(polynomial)에 대해서는 중학교 때 이미 들어 보았을 것이다. 다항식은 우리가 접하게 되는 모든 식들 중에서 가장 기본이 되므로 다항식에 대해 확실히 알아두는 것이 필요하다.

우선 다항식을 이루고 있는 '항(term)' 이란 **문자나 수의 곱으로 이루어진 것**을 말한다. 이때 문자 없이 수(數)만 있어도 항이 되는데 이를 특별히 **상수항**(constant term)이라 한다.

$$\overbrace{x^2+x}^{\text{항}}\underbrace{-2}_{\text{상수항}}$$

단항식에서 단(單)은 하나밖에 없다는 말로, 단항식은 한 개의 항으로 이루어진 식을 뜻한다.

또한 다항식은 '한 개 이상의 항으로 이루어진 식' 을 뜻한다.

여기서 '한 개 이상' 이라는 표현을 기억하자. **단항식도 다항식에 포함된다**는 말이다.

3 지수법칙

다항식의 곱셈을 알아보기 전에 중학교 때 배운 지수법칙을 떠올려 보자.

중학교 때 같은 것을 여러 번 곱해서 쓰거나 계산하는 귀찮음을 피하기 위해서 지수가 도입되었다. 이때부터 우리는 a가 수 또는 문자일 때, a를 n번 곱한 것을 간단히 a^n이라 표기하였고, 아래와 같은 지수법칙을 이용하여 수나 식을 간단히 나타내었다.

그런데 앞에서 언급했듯이 다항식은 **수의 한 표현법이자 확장**으로 볼 수 있기 때문에 아래의 지수법칙을 다항식의 계산에도 그대로 사용할 수 있다. 지수법칙은 다항식의 계산에 있어 매우 유용하게 사용되므로 확실히 알아두길 바란다.

지수법칙

a, b가 실수 또는 다항식이고, m, n이 양의 정수일 때

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b \neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} =$ ❶ $\begin{cases} a^{m-n} & (m-n>0) \\ 1 & (m-n=0) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m-n<0) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

EXAMPLE 001 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $xy^3 \times x^2y^3$

(2) $-3ax \times 4a^4x^5$

(3) $(-xy^2)^3 \times 3x^3 \div (x^2y^3)$

(4) $\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{-3b^2}{a}\right)^3$

ANSWER (1) $xy^3 \times x^2y^3 = x^{1+2} \times y^{3+3} = \boldsymbol{x^3y^6}$ ■

(2) $-3ax \times 4a^4x^5 = -12 \times a^{1+4} \times x^{1+5} = \boldsymbol{-12a^5x^6}$ ■

(3) $(-xy^2)^3 \times 3x^3 \div (x^2y^3) = -x^3y^6 \times 3x^3 \div (x^2y^3) = -3 \times x^{3+3-2} \times y^{6-3} = \boldsymbol{-3x^4y^3}$ ■

(4) $\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{-3b^2}{a}\right)^3 = \dfrac{b^3}{a^6} \times \left(\dfrac{-27b^6}{a^3}\right) = \dfrac{-27b^{3+6}}{a^{6+3}} = \boldsymbol{-\dfrac{27b^9}{a^9}}$ ■

APPLICATION 002 다음 식을 간단히 하여라. Sub Note 002쪽

(1) $3x^2y^5 \times (-2x^4y^3)$

(2) $(-xy^2z^4)^8$

(3) $12(a^2b^3)^4 \div (-ab)^3 \times b^7a$

(4) $(a^2b)^2 \div (ab^2)^2 \div (a^3b^2) \times a^7b^6$

❶ 지수법칙 (5)를 보면 $m-n$의 결과가 양수, 0, 음수가 되는 경우로 나누어 생각하고 있지만 수학적으로 $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (n은 정수, $a \neq 0$)이 성립하므로 나눗셈의 결과를 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 하나로 기억해도 된다.

기 본 예 제 *다항식의 덧셈, 뺄셈*

002 $A=3x^2+5x-4$, $B=-5+2x+2x^2$, $C=5+3x^2-2x$일 때, 다음 식을 계산하여라.

(1) $3A-(B-2C)$ (2) $2A-3\{B-(-A+B)\}+4A-6C$

GUIDE ① A, B, C로 표현된 식을 먼저 정리한다.
② A, B, C에 주어진 식을 대입하고 계산하는데, 세로로 나열하여 계산하는 것이 실수도 줄이고, 계산도 빠르다. 이때 각 항의 계수만 적으면 보다 빠르게 계산할 수 있다.

SOLUTION

(1) $3A-(B-2C)=3A-B+2C$

$$
\Rightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 3A= & 9x^2 & +15x & -12 \\
 & -B= & -2x^2 & -\ 2x & +\ 5 \\
+) & 2C= & 6x^2 & -\ 4x & +10 \\
\hline
 & & \mathbf{13x^2} & \mathbf{+\ 9x} & \mathbf{+\ 3}
\end{array}
\ \blacksquare
$$

← 내림차순으로 정리

(2) $2A-3\{B-(-A+B)\}+4A-6C$

$=2A-3(B+A-B)+4A-6C$

$=2A-3A+4A-6C=3A-6C$

$$
\Rightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 3A= & 9x^2 & +15x & -12 \\
+) & -6C= & -18x^2 & +12x & -30 \\
\hline
 & & \mathbf{-9x^2} & \mathbf{+27x} & \mathbf{-42}
\end{array}
\ \blacksquare
$$

Summa's Advice

다항식의 덧셈, 뺄셈은 동류항의 계수들끼리의 계산에 불과하다. 계산을 어떻게 하면 빨리 할지 직접 생각해 보면서 문제를 풀기 바란다. 특히 모범 답안이라고 참고서에 제시된 풀이는 '수학책'으로서 아름답게 쓰는 걸 목표로 삼는 경우가 많기 때문에, 글씨를 씀으로써 발생되는 시간 낭비는 보통 고려되어 있지 않다. 서술형이 아닌 이상, 문제를 푸는 데 있어 시간 낭비를 어떻게 줄일지 생각할 필요가 있다. 그에 대한 예는 다음과 같다.

① 식을 '점프'한다는 느낌으로 같은 차수의 동류항을 살피는 연습을 한다.

② 각 차수별로 동류항끼리 계수를 더한다. 이때 계산은 가능한 한 암산으로 한다.

유제 Sub Note 038쪽

002-1 $A=2x^2-y^2-xy$, $B=y^2+3xy-2x^2$, $C=5xy-x^2+3y^2$일 때, 다음 식을 계산하여라.

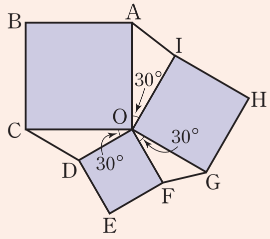
(1) $A+B+2C$ (2) $4B-A+6\{B-(C-A)\}+3B$

유제 Sub Note 038쪽

002-2 두 다항식 $A=6x^2-9x+6$, $B=x^3+2x^2-3x-4$에 대하여 $3(X+B)=A-3B$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

발 전 예 제 *곱셈 공식의 활용(2)*

006 오른쪽 그림과 같이 세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI와 세 삼각형 OCD, OFG, OIA가 한 점 O에서 만나고, $\angle COD=\angle FOG=\angle IOA=30°$이다. 세 삼각형의 넓이의 합이 $\frac{13}{2}$이고, 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 36일 때, 세 정사각형의 넓이의 합을 구하여라.



GUIDE 세 정사각형의 한 변의 길이를 a, b, c로 놓고, 주어진 조건을 식으로 나타내 보자.
두 변의 길이가 a, b이고, 그 끼인 각의 크기가 C인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin C$이다.

SOLUTION

$\overline{OA}=a$, $\overline{OD}=b$, $\overline{OG}=c$라 하면

세 삼각형의 넓이의 합이 $\frac{13}{2}$이므로

$$\triangle OCD+\triangle OFG+\triangle OIA$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin 30°+\frac{1}{2}bc\sin 30°+\frac{1}{2}ca\sin 30°$$
$$=\frac{1}{4}(ab+bc+ca)=\frac{13}{2}$$
$$\therefore ab+bc+ca=26$$

또 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$$4a+4b+4c=36 \qquad \therefore a+b+c=9$$

따라서 세 정사각형의 넓이의 합 $a^2+b^2+c^2$의 값은

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9^2-2\times26=\mathbf{29}$$ ■

유제 Sub Note 039쪽

006-1 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$, $a^2+b^2+c^2=2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $ab+bc+ca$ (2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

1. 다음 괄호 [ ] 안에 적절한 말을 채워 넣어라.

(1) 다항식에서 주목하는 문자를 포함하지 않는 항을 [ ]이라 한다.

(2) 다항식을 특정한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항 순서로 정리하는 것을 [ ]으로 정리한다고 한다.

(3) 다항식 $A+B+C$를 단항식 $M(M\neq0)$으로 나눌 때는 A, B, C 각각에 M의 [ ]를 곱하면 된다.

(4) 다항식의 나눗셈은 자연수의 [ ]과 유사하다. 때문에 다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나눌 때, 자연수처럼 몫 Q와 나머지 R를 생각하여 [ ]라는 관계식을 얻는다. 이때 R는 B보다 [ ]가 낮아야 한다.

(5) 다항식을 $x-\alpha$ 꼴의 일차식으로 나눌 때 사용하는 방법을 [ ]이라 한다.

2. 다음 문장이 참(true) 또는 거짓(false)인지 결정하고, 그 이유를 설명하거나 적절한 반례를 제시하여라.

(1) 모든 실수는 다항식이다.

(2) $x^2+1=0$은 다항식이다.

(3) 3차식과 3차식을 곱하면 9차식이다.

(4) x에 대한 다항식에서 xy^2과 xy^3은 동류항이다.

3. 다음 물음에 대한 답을 간단히 서술하여라.

(1) $a+b$, ab의 값을 알고 있으면 a^6+b^6을 구할 수 있는 이유를 설명하여라.

(2) 차수가 3차인 곱셈 공식이나 그 공식의 활용을 하나하나 떠올려 보고, 어떤 계산에 유용했는지 그 예를 들어 보아라.

(3) 다항식 $f(x)$를 $x-\dfrac{b}{a}$로 나눌 때와 $ax-b$로 나눌 때의 몫과 나머지를 비교하여 설명하여라.

EXERCISES A

Sub Note 084쪽

다항식의 덧셈, 뺄셈

01 두 다항식 A, B에 대하여

$$2A+B=4x^2-x+4,\ A-2B=-3x^2-13x+7$$

일 때, 두 다항식 A, B를 각각 구하여라.

다항식의 덧셈, 뺄셈

02 $A=3x^3+2x+1$, $B=2x^3-6$, $C=-x^2+2x+2$일 때 $A-3\{C-2(A-B)\}+2A+4C$를 구하여라.

다항식의 곱셈

03 서술형

$(x^2+ax+2)(3x^2-4bx+5)$의 전개식에서 x^3의 계수와 x의 계수가 각각 4와 8일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

다항식의 곱셈

04 $(x^9+2x^8+\cdots+9x+10)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

곱셈 공식

05 $(5+2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$을 간단히 한 것은?

① $\dfrac{5^6-2^6}{3}$　② $\dfrac{5^6+2^6}{3}$　③ $\dfrac{5^8-2^8}{3}$

④ $\dfrac{5^{16}-2^{16}}{3}$　⑤ $\dfrac{5^{16}+2^{16}}{3}$

Sub Note 086쪽

01 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\langle A, B\rangle$를

$$\langle A, B\rangle = A^2+AB+B^2$$

이라 할 때, 다항식 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는? [교육청 기출]

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

02 $(x-3)(x+2)(x^2+3x+9)(x^2-2x+4)$를 전개하면 ax^6+bx^3+c가 될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

03 $x^2-x-1=0$일 때, $2x^4-x^3-6x^2+2x+5$의 값을 구하여라.

04 삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c 사이에

$$(c-a-b)(a-b+c)=(a-b-c)(a+b+c)$$

인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $b=c$인 이등변삼각형
③ a를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형
④ b를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형
⑤ c를 빗변의 길이로 하는 직각삼각형

05 $x-y=1-\sqrt{2}$, $y-z=1+\sqrt{2}$일 때, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 값을 구하여라.

Chapter I Exercises

난이도 ■ : 중 ■■ : 중상 ■■■ : 상

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 094쪽

■■□

01 실수 a, b, c에 대하여 $x+1$이 다항식 ax^4+bx^3+cx-a의 인수일 때, 다음 중 반드시 이 다항식의 인수가 되는 것은?

① $x+2$ ② x ③ $x-1$ ④ $x-2$ ⑤ $x-3$

■□□

02 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차다항식 $P(x)$가

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{3}\right)=P\left(\frac{1}{4}\right)=0$$

을 만족할 때, $P(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ 3

■□□

03 x에 대한 이차다항식 $x^2+(a-1)x+14$가 모든 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라.

Chapter I Advanced Lecture

SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 교대식의 인수분해

1 교대식의 성질

다음과 같은 다항식을 한번 살펴보자.

(1) $a-b$　　　　(2) a^3-b^3

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$　　　　(4) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

이 다항식들을 살펴보면 각 식에 포함된 임의의 두 문자를 서로 바꿔 쓸 때, 식의 형태는 같지만, 그 식 전체의 부호는 반대가 됨을 알 수 있다. 이와 같은 다항식을 교대식[1]이라고 한다.

이제 다항식 $f(x,\ y,\ z)$가 교대식이라고 하자. 그러면 그 정의에 따라

$$f(x,\ y,\ z)=-f(y,\ x,\ z)=-f(x,\ z,\ y)=-f(z,\ y,\ x)$$

라는 항등식을 얻을 수 있다. 이 사실을 이용하면 다음의 정리를 증명할 수 있다.

> **[정리 1]** 세 문자 $x,\ y,\ z$에 대한 다항식 $f(x,\ y,\ z)$가 교대식이면
> $f(x,\ y,\ z)$는 $x-y,\ y-z,\ z-x$를 인수로 갖는다.

[정리 1]은 다음과 같이 증명할 수 있다.

항등식 $f(x,\ y,\ z)=-f(y,\ x,\ z)$에서 y와 z를 임의의 상수로 생각하자.
이때 변수 x에 y를 대입해도 등식은 성립하므로

$$f(y,\ y,\ z)=-f(y,\ y,\ z) \qquad \therefore f(y,\ y,\ z)=0$$

이는 x에 대한 다항식 f에서 x에 y를 대입하면 식의 값이 0이 됨을 보인 것이다.

---

[1] 다항식임을 강조하여 교대다항식(alternating polynomial)이라고도 부른다. 교대식에서 '교대'는 어느 두 문자를 바꾸었을 때 부호가 바뀌는 것을 의미한다.

01. 기수법과 다항식의 표현

(1) 기수법(numeral system)이란

기수법이란, 기호(symbol)를 이용해 수[1]를 표현하는 체계적인 방법을 말한다. 가장 단순한 기수법에는 1에 해당하는 수를 '／'와 같은 기호로 표기하고, 1보다 큰 수에 대해서는 기호 '／'의 개수로 나타내는 **단항기수법**(unary numeral system)이 있다.

일상생활에서 단항기수법은 수를 보다 읽기 쉽도록 위치와 모양을 변형해 다섯 개의 '／'을 하나의 기호처럼 보이도록 한다. 오른쪽 그림과 같은 것인데 이는 학급임원 선거 때 한 번쯤 써보았을 것이다.
단항기수법의 원리상 기호 '／'의 위치는 전혀 고려되지 않는데 이러한 성질을 가진 기수법을 비(非)자릿수 기수법이라 한다.

반면, 기호를 나열하여 수를 나타내되 위치에 따라 기호가 나타내는 값이 달라지는 기수법을 자릿수 기수법 또는 위치 기수법이라 한다. 특히 $0, 1, 2, \cdots, p-1$이라는 p개의 숫자만을 조합하여 사용하는 자릿수 기수법을 **p진법**(p-base system)이라고 한다. p진법은 자리의 위치에 따라 오른쪽에서부터 $1, p, p^2, p^3, \cdots$으로 자릿수가 p배로 커지는 기수법이다.
우리가 사용하는 자연수의 진법은 $p=10$인 **10진법**(decimal system)이다. 10진법은 0부터 9까지 10개의 숫자를 사용하고, 오른쪽에서부터 $1, 10, 10^2, 10^3, \cdots$으로 자릿수가 10배로 커진다. 예를 들면 숫자 1을 3개 나열하여 만든 수 111에서 일의 자리에 있는 1은 그대로 1을 의미하지만, 십의 자리에 있는 1은 10을 의미하고, 백의 자리에 있는 1은 100을 의미한다.
일반적으로 p진법은 p의 값에 따라 2진법, 3진법, $\cdots$이라 부르는데, 이들은 사용되는 숫자의 종류와 위치에 따른 자릿수가 10진법과 다를 뿐, 숫자의 나열 방식은 동일하므로 10진법과의 구분을 명확히 하기 위해 $111_{(2)}$, $111_{(5)}$와 같이 끝에 p의 값을 표기해 놓는다.

내신 · 모의고사 대비 TEST

숨마쿰라우데®

[수학 (상)]

Ⅰ. 다항식

Ⅱ. 방정식과 부등식

Ⅲ. 도형의 방정식

정답은 ➡ 본책의 해설지에서
해설은 ➡ 당사 홈페이지에서
확인하실 수 있습니다.
www.erumenb.com

01 다항식의 연산

기본 ☑ Exercises

01 두 다항식 P, Q가

$$P=3x^2+4x^2y-5y^2,\ Q=2x^2+3x^2y-xy^2+7y^2$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) $P-3Q$

(2) $-P+2Q-\{2P-(3Q-P)\}$

02 $(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$를 전개하면 ax^6+bx^3+c가 될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

03 $(x+2)(x+4)(x+1)(x+8)$을 전개한 식에서 x^2의 계수를 a, x의 계수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

04 x에 대한 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정이다. $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

$$\begin{array}{c|cccc} e & 2 & a & b & 3 \\ & & c & \square & \square \\ \hline & d & 4 & \square & \multicolumn{1}{|c}{2} \end{array}$$

05 실수 $x(x>0)$가 $x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{3}$을 만족시킬 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하여라.

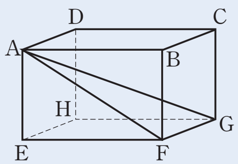
06 다항식 $f(x)$를 x^2+4로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이면 $f(x)$를 순서쌍 (a, b)로 표시한다고 하자.

$$A=x^4+x^3+5x^2+3x+2,\ B=x^3+x+4$$

에 대하여 두 다항식 A, B를 나타내는 순서쌍을 각각 (a_1, a_2), (b_1, b_2)라 할 때 $a_1b_1+a_2b_2$의 값을 구하여라.

01 다항식 $P(x)=x^3+x^2+x+1$을 $x-k$로 나눈 나머지와 $x+k$로 나눈 나머지의 합이 8이다. $P(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

02 그림과 같이 모든 모서리 길이의 합이 20인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. $\overline{AG}=\sqrt{13}$일 때, 직육면체 ABCD−EFGH의 겉넓이는?



① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

03 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이고, $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 10이다. $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지를 $ax+b$라 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $3a+b$의 값을 구하시오.

04 삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(0)=R(3)$일 때, $R(5)$의 값을 구하시오.