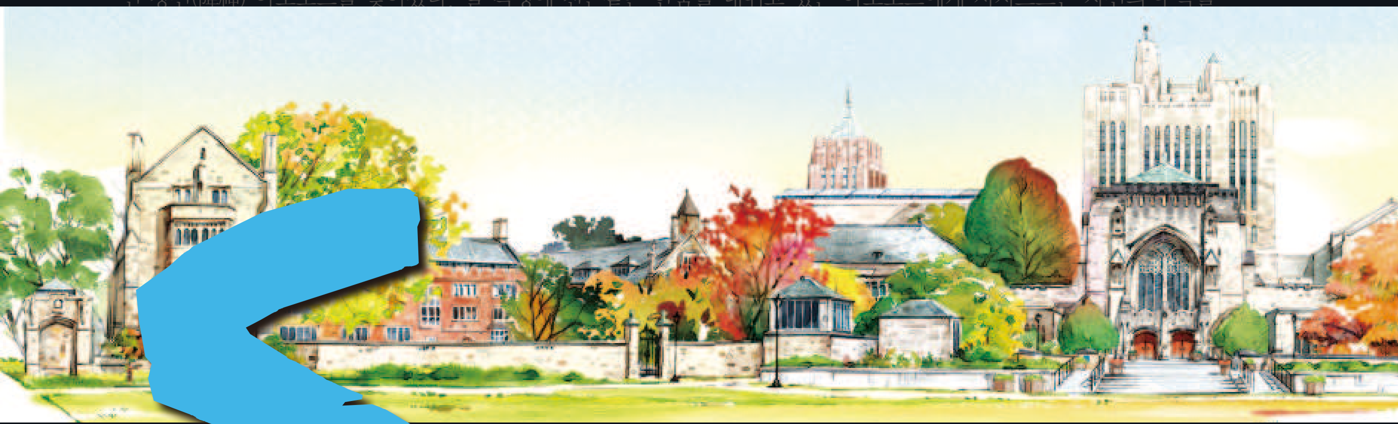
SUMMA CUM LAUDE

튼튼한 개념! 흔들리지 않는 실력!

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]



수학 Ⅱ

상위권 선호도 1위 브랜드

최강의 수학 기본서! – 숨마쿰라우데

이보다 더 상세할 수 없다! 쉽고 상세한 개념 설명

기초–기본–발전–심화 학습을 위한 체계적인 문제 구성

사고력을 넓히는 심화 연계 학습

2019 새교육과정

SUMMA CUM LAUDE

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

수학 Ⅱ

이룸이앤비
Education & Books

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

INTRODUCTION

[이 책을 펴내면서]

「숨마쿰라우데 수학 Ⅱ」를 소개합니다.
수학 Ⅱ에서는 수학의 꽃이라 불리는 '미적분'을 배우게 됩니다.
사실 '미적분'은 수학의 꽃이라 불리지만 현실에서는 학생들을
가장 괴롭히는 내용이기도 하지요.
"어떻게 하면 미적분을 보다 쉽게 이해시킬까?"
우리 저자들은 이를 두고 많은 고민을 하였습니다.

기존의 책들은 대부분 개념을 잘게 쪼개어 간단하게 설명하고
문제 풀이에 치중하고 있기 때문에 마치 모든 개념을 따로따로
외워야하는 것처럼 느껴지게 합니다.
하지만 수학의 개념도 꼬리에 꼬리를 무는 하나의 이야기입니다.
우리 저자들은 스토리텔링 기법을 접목하여 개념의 등장 배경이나
단원별 연계성을 바탕으로 전체를 아우르는 상세한 설명과
경험에서 우러나온 충고들로 수학에 어려움을 가진 독자라 하더라도
제대로 이해할 수 있도록 하였습니다.
한걸음 더 나아가 **Advanced Lecture**와 **MATH** ***for*** **ESSAY**에는
교과서와 연계되고 대학별 고사 및 구술 면접 등에
도움이 될 수 있는 심화된 내용을 다루어 놓았습니다.
「숨마쿰라우데 수학 Ⅱ」 한 권이면
흔들리지 않는 실력을 쌓는 데 부족함이 없으리라 생각합니다.

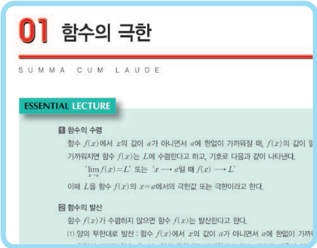
어떤 일이든 그것이 재미가 없다면 그것에 대한 관심이 부족해서라고 감히 생각합니다.
조금만 더 관심을 가져보고 꾸준히 공부한다면
그 속에서 수학에 대한 재미를 찾을 수 있을 것입니다.
이 책을 통해 수학 문제를 해결하며 느끼는 희열을 경험하면서
수학에 대한 재미를 찾아갈 수 있기를 바랍니다.

– 저자 일동 –

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]


01 함수의 극한

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

1 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a} f(x) = L$' 또는 '$x \to a$일 때 $f(x) \to L$'

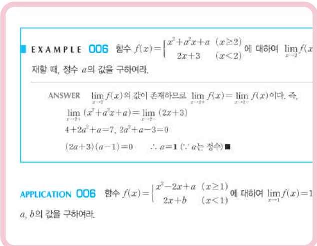
이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 한다.

2 함수의 발산

함수 $f(x)$가 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 발산한다고 한다.

01 개념 학습

수학 학습의 기본은 개념에 대한 완벽한 이해입니다. 단원을 개념의 기본이 되는 소단원으로 분류하여, 기본 개념을 확실하게 이해할 수 있도록 설명하였습니다. 〈공식의 정리〉와 함께 〈공식이 만들어진 원리〉, 학습 선배인 〈필자들의 팁〉, 문제 풀이시 〈범하기 쉬운 오류〉 등을 설명하여 확실한 개념 정립이 가능하도록 하였습니다.


EXAMPLE 006 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+a^2x+a & (x \ge 2) \\ 2x+3 & (x<2) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x \to 2} f(x)$가 존재할 때, 정수 a의 값을 구하여라.

ANSWER $\lim_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$이다. 즉,

$\lim_{x \to 2+} (x^2+a^2x+a) = \lim_{x \to 2-} (2x+3)$

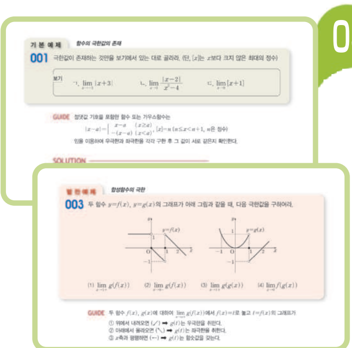
$4+2a^2+a=7,\ 2a^2+a-3=0$

$(2a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1$ ($\because a$는 정수) ■

APPLICATION 006 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & (x \ge 1) \\ 2x+b & (x<1) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x \to 1} f(x)=1$일 때, a, b의 값을 구하여라.

02 EXAMPLE & APPLICATION

소단원에서 공부한 개념을 적용할 수 있도록 가장 적절한 〈EXAMPLE〉을 제시하였습니다. 다양한 접근 방법이나 추가 설명을 통해 개념을 확실하게 이해하고 넘어가도록 하였습니다. EXAMPLE에서 익힌 방법을 적용하거나 응용해 봄으로써 개념을 탄탄하게 다질 수 있도록 APPLICATION을 제시하였습니다.



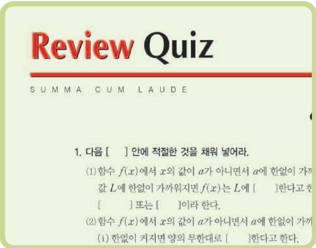
03 기본예제 & 발전예제

탄탄한 개념이 정리된 상태에서 본격적인 수학 단원별 유형을 익힐 수 있습니다. 대표적인 유형 문제를 〈기본예제〉와 〈발전예제〉로 구분해 풀이 GUIDE와 함께 그 해법을 보여 주고, 같은 유형의 〈유제〉 문제를 제시하여 해당 유형을 완벽하게 연습할 수 있습니다. 또, 〈Summa's Advice〉에 보충설명을 제시하여 실수하기 쉬운 사항, 중요한 추가적인 설명을 덧붙여 해당 문항 유형에 철저하게 대비할 수 있도록 하였습니다.

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

STRUCTURE

숨마쿰라우데® [수학 II]


Review Quiz

SUMMA CUM LAUDE

1. 다음 [ ] 안에 적절한 것을 채워 넣어라.

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까

값 L에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 L에 [ ]한다고 한

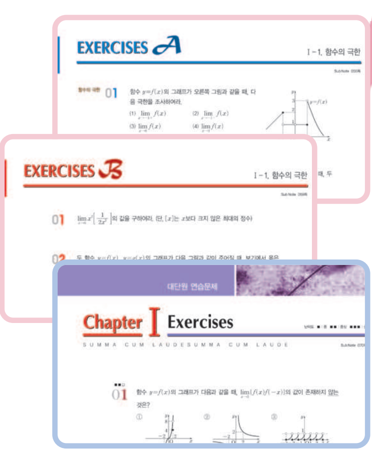
[ ] 또는 [ ]이라 한다.

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까

(i) 한없이 커지면 양의 무한대로 [ ]한다고 한다.

04 중단원별 Review Quiz

소단원으로 나누어 공부했던 중요한 개념들을 중단원별로 모아 괄호 넣기 문제, 참 · 거짓 문제, 간단한 설명 문제 등을 제시하였습니다. 이는 중단원별로 중요한 개념을 다시 한번 정리하여 전체를 보는 안목을 유지할 수 있도록 해 줍니다.


EXERCISES A

Ⅰ-1. 함수의 극한

EXERCISES B

Ⅰ-1. 함수의 극한

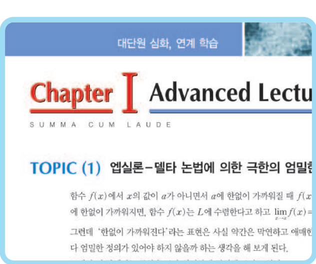
대단원 연습문제

Chapter Ⅰ Exercises

SUMMA CUM LAUDE SUMMA CUM LAUDE

05 중단원별, 대단원별 EXERCISES

이미 학습한 개념과 유형문제들을 중단원과 대단원별로 테스트하도록 하였습니다. 〈난이도별〉로 A, B단계로 문항을 배치하였으며, 내신은 물론 수능 시험 등에서 출제가 가능한 문제들로 구성하여 정확한 자신의 실력을 측정할 수 있습니다. EXERCISES를 통해 부족한 부분을 스스로 체크하여 개념 학습으로 피드백하면 핵심 개념을 보다 완벽히 정리할 수 있습니다.


대단원 심화, 연계 학습

Chapter Ⅰ Advanced Lectu

SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 엡실론-델타 논법에 의한 극한의 엄밀

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x$

에 한없이 가까워지면, 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고

그런데 '한없이 가까워진다'라는 표현은 사실 약간은 막연하고 애매한

다 엄밀한 정의가 있어야 하지 않을까 하는 생각을 해 보게 된다.

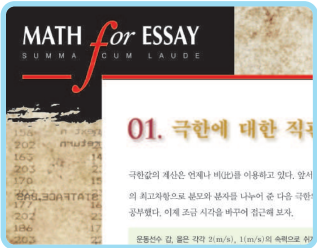
06 Advanced Lecture(심화, 연계 학습)

본문보다 더욱 심화된 내용과 앞으로 학습할 상위 단계와 연계된 내용을 제시하고 있습니다. 특히, 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 설명하여 깊이 있는 학습으로 수학 실력이 보다 향상될 수 있도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

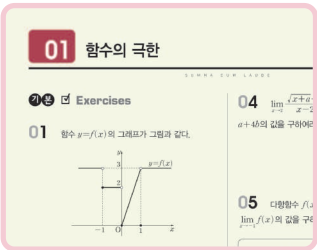
STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]



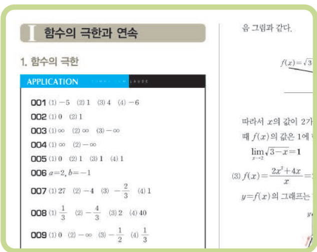
07 MATH for ESSAY

고2 수준에서 연계하여 공부할 수 있는 수리 논술, 구술에 관련된 학습 사항을 제시하였습니다. 앞의 심화, 연계 학습과 더불어 좀 더 수준 있는 수학을 접하고자 하는 학생들을 위해 깊이 있는 수학 원리 학습은 물론 앞으로 입시에서 강조되는 〈수리 논술, 구술〉에도 대비할 수 있도록 하였습니다.



08 내신 · 모의고사 대비 TEST

수학 공부에서 많은 문제를 접하여 적응력을 키우는 것은 원리를 이해하는 것과 함께 중요한 수학 공부법 중 하나입니다. 이를 위해 별도로 단원별 우수 문제를 〈내신 · 모의고사 대비 TEST〉를 통해 추가로 제공하고 있습니다. 단원별로 자신의 실력을 측정하거나, 중간 · 기말 시험 및 각종 모의고사에 대비하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.



09 SUB NOTE – 정답 및 해설

각 문제에 대한 좋은 해설은 문제풀이 만큼 실력 향상을 위해 필요한 요소입니다. 해당 문제에 대해 가장 적절하고 쉬운 풀이 방법을 제시하였으며, 알아두면 도움이 되는 추가적인 풀이 방법 역시 제시하여 자학자습을 위한 교재로 손색이 없도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅰ. 함수의 극한과 연속

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

숨마쿰라우데® [수학 Ⅱ]

CHAPTER Ⅱ. 다항함수의 미분법

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

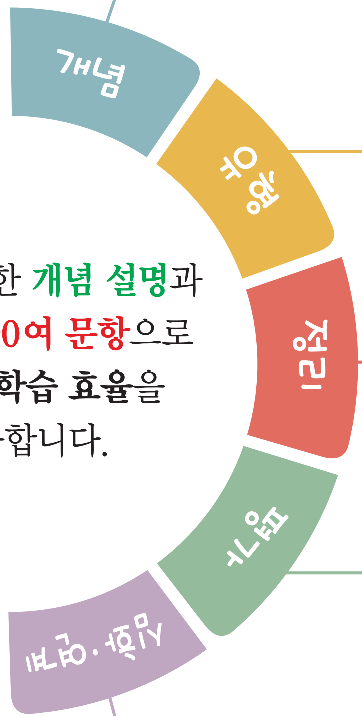
[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅲ. 다항함수의 적분법

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STUDY SYSTEM

[수학 학습 시스템]



쉽고 상세한 **개념 설명**과
엄선된 **890여 문항**으로
최고의 학습 효율을
제공합니다.

단원 개념 학습 단계

EXAMPLE
APPLICATION

필수 유형 학습 단계

기본, 발전예제
유제

단원 학습 정리 단계

중단원별 Review Quiz
중단원별 EXERCISES
대단원별 Exercises

최종 실력 테스트 단계

내신 · 모의고사 대비 TEST

심화, 연계 학습 단계

Advanced Lecture
MATH for ESSAY

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

상위 1%가 되기 위한 효율적 학습법

수학 공부법 특강

www.erumenb.com

『수학Ⅱ』는 문·이과 공통 과목으로 핵심이 되는 내용은 함수의 미분과 적분이며, 그 기본 도구는 함수의 극한과 연속이다.

미분과 적분은 대학 진학 이후에도 전공에 꾸준히 응용되기 때문에 단순히 점수를 따기 위해 공부하는 것보다는 교양으로 접근하는 것이 보다 의미 있다고 생각한다. 특히 경제학과와 같은 상경계열로 진학하고자 하는 학생들은 미래를 위해서라도 미분과 적분에 대한 기초를 탄탄히 다져놓는 것이 중요하다. 또한 이과 학생들에게는 다소 어려운 『미적분』을 배우는 데 필요한 기초 단계에 해당하므로 『수학Ⅱ』에 대한 공부를 충실히 해 놓도록 하자.

『수학Ⅱ』는 함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법의 3개의 단원으로 구성되어 있다.

단원 이름에서 알 수 있듯이 『수학Ⅱ』에서는 다항함수에 대해서만 다룬다. 따라서 다항함수의 성질, 특히 이차함수와 삼차함수의 성질에 대해 잘 알고 있으면 문제를 푸는 것이 한결 수월할 것이다.

이런 이유로 『수학Ⅱ』 공부를 시작하기에 앞서 이전에 배웠던 과목의 관련 단원을 복습하여 기초 개념을 확실히 잡아두는 시간을 갖길 바란다.

Ⅰ. 함수의 극한과 연속	『고등 수학(하)』의 ‘함수’ 알아두기
Ⅱ. 다항함수의 미분법	『고등 수학(상), (하)』의 ‘방정식’, ‘함수’ 알아두기 (특히 그래프의 모양에 유의해서 잘 알아두자.)
Ⅲ. 다항함수의 적분법	

■ 미분과 적분을 공부하는 바른 자세

우리가 배우는 수학의 내용들은 서로 유기적인 관계에 있다. 미분과 적분은 그중에서도 특히 서로의 연관성이 높다. 그러므로 미분과 적분을 공부할 때 독자적인 학습보다는 종합적인 학습이 필요하다.

하나의 함수를 보더라도 미분으로 바라보는 동시에
적분으로도 바라보는 시각을 키워 보자.

이러한 훈련을 하다 보면 함수라는 핵심 대상을 제대로 이해할 수 있는 사고가 생기게 된다. 또한 대수와 기하를 넘나드는 유연성을 기르도록 하자.

미분과 적분의 개념을 처음 배울 때에는 대수적인 정의로 배우지만 기하적인 의미도 항상 함께 생각하고 있어야 한다. 그래프에서 미분은 접선의 기울기를, 정적분은 넓이를 의미하는데 대수적 문제를 가장하고선 기하적 의미를 적용하여 해결하게끔 하는 고난도 문제들이 수능에 자주 출제되기 때문이다.

마지막으로 함수와 방정식은 같은 대상, 다른 표현이라는 점을 기억하자.

미분과 적분의 대상은 함수이지만, 원하는 결과를 얻기 위해서는 필연적으로 방정식 문제를 해결해야 한다는 것이다. 따라서 함수와 방정식 사이의 관계를 항상 염두에 두어 이를 적시에 적용할 수 있도록 하자.

■ 수학 공부의 효율적 학습법

수학 공부를 하는 데 도움이 되는 학습법 몇 가지를 소개하려고 한다. 본인의 학습법을 점검해 보고 자신에게 맞는 효율적인 학습법을 찾길 바란다.

1 개념과 원리를 이해하자.

수학을 공부할 때 무턱대고 문제를 풀다 보면 기본적이고 흔한 유형의 문제 정도는 요령이 생겨 풀 수 있겠지만 원리를 이해하지 못하면 문제가 약간만 변형되어도 풀지 못하는 경우가 다반사이다. 어떤 과목이든지 개념과 원리가 중요하지만 수학은 특히나 개념과 원리 이해가 필수적이다. 여기서 원리를 이해한다는 것은 단순히 문제의 해법을 이해한다는 것을 넘어 꼬리에 꼬리를 물어 지식이 확장될 수 있게 한다는 것이다. 예를 들면 흔히 덧셈을 공부한 다음에 뺄셈을 공부하게 되는데 이때 뺄셈을 단독 원리로 생각하지 않고, 덧셈의 연장선으로 보고 이해해야 진정으로 뺄셈을 이해했다고 할 수 있다.

이런 이유로 수학 공부를 시작할 때에는 개념기본서를 가지고 시작하기 바란다. 소단원별로 요약된 핵심정리를 읽고 나서 흐름을 머릿속에 먼저 파악하자. 그런 다음 그 정리만으로 무슨 소리인지 잘 모르겠다면 본문의 그 부분을 찾아가서 상세한 설명을 살펴보면 된다.

2 문제로 다양한 패턴을 익혀라.

지금까지 원리를 차근차근 공부했다면 그 다음으로 지킬 것이 또 하나 있다. 바로

원리를 알게 되면 반드시 그에 대한 문제를 풀어 확인해야 한다.

간혹 핵심정리만 읽고 다 아는 내용이라고 대충 넘어가는 독자들이 있는데, 이러면 십중팔구 시험에서 낭패를 보게 될 것이다. 왜냐하면 원리는 원리일 뿐 그에 대한 문제는 다양한 패턴으로 주어지기 때문이다. 그러니 원리가 어떻게 문제화되는지 확인할 절차가 필요하다는 것이다. 또한 이런 활동이 원리를 뇌에 저장시키는 과정이기도 하다.

우리 뇌에는 단기기억장치와 중장기기억장치가 있는데 처음에 보는 것은 단기기억장치에 있다가 소멸된다. 이것을 보고 또 보고 기억하려 애쓰면 중장기기억장치에 저장되어 좀처럼 사라지지 않고 머물러 있게 된다.

즉, 학습하는 데 있어서 처음에 어느 정도 궤도에 올려놓으면 다음에 조금만 복습해도 다시 회복할 수 있는데, 처음부터 대충하고 넘어가서 뇌에 저장시키지 않으면 다음에 또다시 처음부터 시작해야 하는 난감한 처지에 이르게 된다. 따라서 뇌가 익숙해지도록 하나의 원리를 알면 그 원리에 관련된 다양한 문제들을 풀어 보아야 한다.

3 문제 풀이와 개념 공부를 함께 하라.

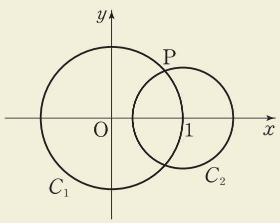
다음 문제를 살펴보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$C_1 : x^2+y^2=1$

$C_2 : (x-1)^2+y^2=r^2 \ (0<r<\sqrt{2})$

이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 점 P의 x좌표를 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r \to \sqrt{2}-} \frac{f(r)}{4-r^4}$의 값을 구하여라.



『수학Ⅱ』의 함수의 극한을 공부한 학생이 위의 문제를 풀기 시작했다. 그런데 앞부분부터 어떻게 풀어야 할지 감이 잡히지 않는다. 그래서 역시 수학은 어렵구나, 극한은 어렵구나 하며 포기하고 말았다.

혹 여러분도 이런 식으로 공부를 포기한 적이 있는가?

물론 문제 중에는 손도 대보지 못할 정도로 어려운 것도 있지만 대부분은 그렇지 않다. 위의 상황은 문제를 정확히 분석하지 못해서 나온 결과이다.

이 문제의 앞부분은 『고등 수학(상)』에 나오는 원에 대한 내용이다. 하지만 문제의 핵심은 극

한이라는 것이고, 원에 대한 부분은 극한을 묻기 위한 수단에 불과한 것이다. 설령 이 문제가 어렵다 하더라도 이것은 극한의 개념이 어려워서가 아니라 앞부분의 복습이 잘 이루어지지 않아서 어려운 것이다. 풀어 보면 알겠지만 정작 극한을 구하는 부분은 인수분해를 통해서 쉽게 해결된다. 학생들에게 당부하고 싶은 것은 바로

문제가 가지고 있는 핵심과 그 부수적인 것들을 분리해서 이해

하라는 것이다.

현재 공부하는 『수학Ⅱ』의 내용은 내용대로 정리하고, 『고등 수학(상)』 부분도 따로 정리하면서 공부하면 문제를 이해하는 데 도움이 될 것이다.

여기서 바로 백 번 들어도 지나치지 않는 **요약노트의 중요성**을 다시금 느끼게 될 것이다. 문제를 분석만 하고 지나가면 지금까지 어떠한 문제들을 다루었고, 부가적으로 알아두어야 하는 원리들이 무엇이었는지 금세 까먹게 된다. 문제를 풀면서 문제 속에 나오는 내용을 요약노트에 하나씩 정리하라. 단, **요약노트를 정리할 때에는** 무작정 처음부터 써내려가지 말고, **단원을 분리해 놓은 다음 해당 단원에 맞게 내용을 기록**해 두어야 한다.

이렇게 해야 정리해 놓은 내용들이 순서대로 자리를 잡게 되어 나만의 [요약노트]가 완성되는 것이다.

4 해설집을 100% 활용하라.

많은 학생들이 문제의 해설 과정을 볼 때, 정답이 무엇일까에만 관심을 갖는다. 하지만 이는 잘못된 습관이다. 답은 문제마다 다르므로 그렇게 중요한 것이 아니다. 중요한 것은 문제의 다양한 상황과 조건이다. 문제의 유형은 어느 정도 제한된 범위에서 출제된다. 같은 의미를 지녔어도 어떻게 표현하는가에 따라 새롭게 느낄 수 있지만 냉정하게 분석해 보면 근본적으로는 그렇지 않다는 것을 알 수 있다. 따라서 문제의 해설 과정을 참고할 때에는 **문제에 어떤 조건이나 상황이 제시되었으며, 이에 대해 어떤 이론을 활용하여 어떻게 해결해 나가는지에 초점**을 맞춰야 한다. 이러한 과정을 통해 우리는 개념을 완벽하게 습득할 수 있고, 여러 가지 개념이 복잡하게 결합된 문제에도 쉽게 접근할 수 있다. 만약 해결 과정에서 개념이나 공식을 활용하는 방법이 익숙치 않다면 풀이 과정을 반복해서 따라해 보고 그 과정을 암기하는 것도 하나의 방법이다.

숨마쿰라우데 수학 기본서로 제대로 된 수학 공부를 하여 본인이 원하는 결과를 얻기 바란다.

CHAPTER I
함수의 극한과 연속

숨마쿰라우데®
[수학 Ⅱ]

INTRO to Chapter Ⅰ
함수의 극한과 연속

S U M M A C U M L A U D E

극한은 미적분법의 기초가 되는 개념이다. 극한을 이용하면 무한을 바라보는 수학적 사고가 한층 높아질 뿐만 아니라 다양한 함수들에 대한 이해가 폭넓어질 수 있다. 어떤 현상에 대해 시간에 따라 어떻게 변화하는지에 주목하면, 그 현상을 분석하는 것이 가능해지고 더 나아가 일어날 일을 예측할 수도 있게 된다.

본 단원의 구성에 대하여...

<table>
<tr><td rowspan="3">Ⅰ. 함수의 극한과 연속</td><td>1. 함수의 극한</td><td>01 함수의 극한
02 함수의 극한에 대한 성질
03 함수의 극한의 응용
● Review Quiz
● EXERCISES</td></tr>
<tr><td>2. 함수의 연속</td><td>01 연속함수
02 연속함수의 성질
● Review Quiz
● EXERCISES</td></tr>
<tr><td colspan="2">● 대단원 연습문제
● 대단원 심화, 연계 학습
TOPIC (1) 엡실론 – 델타 논법에 의한 극한의 엄밀한 정의
● 논술, 구술 자료
01. 극한에 대한 직관
02. 제논의 역설</td></tr>
</table>

무한(infinite)의 등장

'무한' 하면 끝없는 바다, 우주, 원주율 등이 생각이 날 것이다. 유한한 존재인 우리 인간이 이해하기에 어려우면서도 오묘한 의미를 지닌 무한의 역사는 꽤 오래되었다. 그리스어로 무한을 '아페이론(apeiron)' 이라 하는데, 이것은 유한을 뜻하는 '페라스(peras)' 의 부정형이다. 고대 그리스 시대의 사람들은 이 '아페이론' 이라는 단어를 부정적이고, 심지어는 멸시적인 뜻으로 사용하기도 하였다. 그 이유는 당시 그리스 사람들의 사상에는 유한인 것을 무한인 것보다 높이 평가하는 '유한주의' 가 대체로 그 사회를 지배하고 있었기 때문인 것으로 추측된다.

동양에서도 오래 전부터 무한이라는 개념이 사용되었다. 고대 중국의 사상가들은 무한을 다

01 함수의 극한

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

1 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a} f(x) = L$' 또는 '$x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow L$'

이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 한다.

2 함수의 발산

함수 $f(x)$가 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 발산한다고 한다.

(1) 양의 무한대로 발산 : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$' 또는 '$x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$'

(2) 음의 무한대로 발산 : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$' 또는 '$x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow -\infty$'

3 우극한과 좌극한

(1) 우극한 : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a+} f(x) = L$' 또는 '$x \longrightarrow a+$일 때 $f(x) \longrightarrow L$'

(2) 좌극한 : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

'$\lim_{x \to a-} f(x) = M$' 또는 '$x \longrightarrow a-$일 때 $f(x) \longrightarrow M$'

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$

고등 수학의 함수 단원에서는 대응을 통해 함수를 이해하고, 함숫값을 구해 보았다. 또 몇몇 함수의 그래프도 그려 그 특징을 살펴보았다. 이 단원에서는 그래프를 바탕으로 하여 극한이라는 개념에 대해 배우게 된다. 지금까지 $x=a$에서의 함숫값에 주목하였다면 이제부터는 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때의 값에 주목하는 것이다.

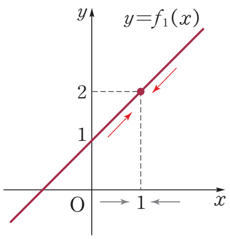
1 함수의 수렴

(1) $x \longrightarrow a$일 때 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 어떤 값에 가까워지는지 다음 두 함수에서 살펴보자.

$$f_1(x)=x+1,\ f_2(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

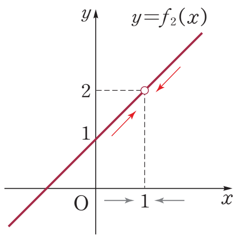
함수 $f_1(x)=x+1$은 모든 실수에서 정의되어 있으므로 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f_1(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다는 것을 직관적으로 또는 그래프를 통해 확인할 수 있다.



함수 $f_2(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않지만 $x\neq1$인 모든 실수에 대하여

$$f_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

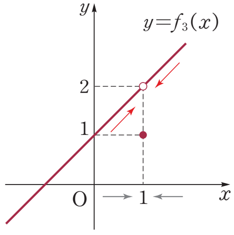
이므로 그래프를 통해 알 수 있듯이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f_1(x)$에서와 같이 $f_2(x)$의 값도 2에 한없이 가까워진다.



한 가지 경우를 더 살펴보자. 함수 $f_3(x)$가

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

과 같이 정의되어 있는 경우, $x=1$에서의 함숫값은 분명 1이지만 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f_3(x)$의 값 역시 $f_1(x)$에서와 같이 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**(convergence)한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

> $\lim\limits_{x\to a}$ ❶ $f(x)=L$ 또는 $x \longrightarrow a$ ❷ 일 때 $f(x) \longrightarrow L$

이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **극한값**(limiting value) 또는 **극한**(limit)이라 한다.

또 함수 $f_2(x)=-\dfrac{1}{x^2}$에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워지면 $f_2(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

이와 같이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산**한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \text{ 또는 } x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow -\infty$$

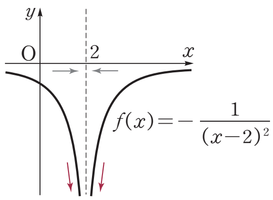
위의 두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$의 $x \longrightarrow 0$일 때의 극한을 기호로 각각 나타내면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

EXAMPLE 003 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|}$

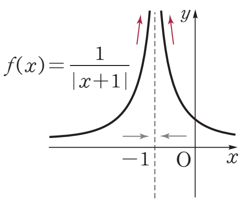
ANSWER (1) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to 2}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}=-\infty \ ■$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x+1|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|}=\infty \ ■$$

APPLICATION 003 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한을 조사하여라. Sub Note 003쪽

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x-2)^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{|x-1|}\right)$

기 본 예 제 　*함수의 극한값의 존재*

001

극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 골라라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

ㄱ. $\lim_{x\to -3}|x+3|$ 　　ㄴ. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$ 　　ㄷ. $\lim_{x\to 0}[x+1]$

GUIDE 절댓값 기호를 포함한 함수 또는 가우스함수는

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a) \\ -(x-a) & (x<a)\end{cases},\ [x]=n\ (n\le x<n+1,\ n\text{은 정수})$$

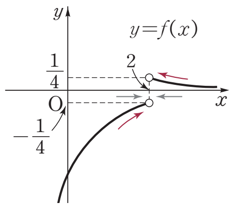
임을 이용하여 우극한과 좌극한을 각각 구한 후 그 값이 서로 같은지 확인한다.

SOLUTION

ㄱ. $|x+3|=\begin{cases} x+3 & (x\ge -3) \\ -(x+3) & (x<-3)\end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x\to -3+}(x+3)=0,\ \lim_{x\to -3-}\{-(x+3)\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to -3}|x+3|=0$$

ㄴ. $f(x)=\frac{|x-2|}{x^2-4}=\begin{cases} \frac{1}{x+2} & (x>2) \\ -\frac{1}{x+2} & (x<2)\end{cases}$ 이라 하면



$$\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to 2-}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}$$

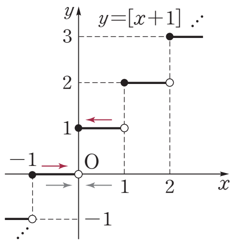
따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $0\le x<1$에서 $1\le x+1<2$이므로

$$[x+1]=1 \qquad \therefore \lim_{x\to 0+}[x+1]=1$$

$-1\le x<0$에서 $0\le x+1<1$이므로

$$[x+1]=0 \qquad \therefore \lim_{x\to 0-}[x+1]=0$$



따라서 $\lim_{x\to 0}[x+1]$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. ■

유제

001-1

Sub Note 024쪽

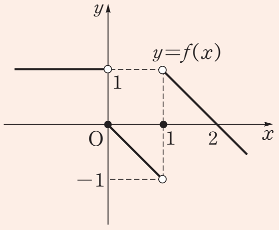
극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 골라라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

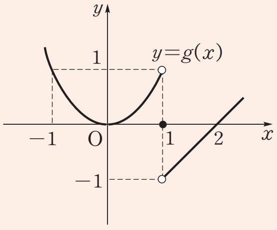
보기

ㄱ. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ 　　ㄴ. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{|x+2|}$ 　　ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{[x-2]}$

발 전 예 제 합성함수의 극한

003 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 극한값을 구하여라.





(1) $\lim_{x \to 1+} g(f(x))$ (2) $\lim_{x \to 0-} g(f(x))$ (3) $\lim_{x \to 1+} g(g(x))$ (4) $\lim_{x \to 0} f(g(x))$

GUIDE 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a+} g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓고 $t=f(x)$의 그래프가

① 위에서 내려오면 (↙) ➡ $g(t)$는 우극한을 취한다.
② 아래에서 올라오면 (↖) ➡ $g(t)$는 좌극한을 취한다.
③ x축과 평행하면 (←) ➡ $g(t)$는 함숫값을 갖는다.

SOLUTION

$f(x)=t$, $g(x)=s$로 놓으면

(1) $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로 $\lim_{x \to 1+} g(f(x)) = \lim_{t \to 1-} g(t) = \mathbf{1}$ ■

(2) $x \longrightarrow 0-$일 때 $t=1$이므로 $\lim_{x \to 0-} g(f(x)) = g(1) = \mathbf{0}$ ■

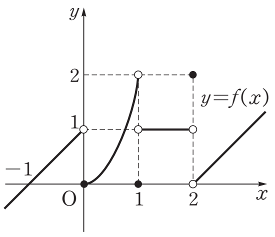
(3) $x \longrightarrow 1+$일 때 $s \longrightarrow -1+$이므로 $\lim_{x \to 1+} g(g(x)) = \lim_{s \to -1+} g(s) = \mathbf{1}$ ■

(4) $x \longrightarrow 0$일 때 $s \longrightarrow 0+$이므로 $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{s \to 0+} f(s) = \mathbf{0}$ ■

유제

003-1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

Sub Note 025쪽



보기

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(f(x)) = 1$

ㄴ. $\lim_{x \to 2+} f(f(x)) = 0$

ㄷ. $f\left(\lim_{x \to 1+} f(x)\right) = f\left(\lim_{x \to 1-} f(x)\right)$

Review Quiz for Ⅰ-1. 함수의 극한

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 055쪽

1. 다음 [ ] 안에 적절한 것을 채워 넣어라.

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 L에 [ ]한다고 한다. 이때 L을 $f(x)$의 [ ] 또는 [ ]이라 한다.

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이

(ⅰ) 한없이 커지면 양의 무한대로 [ ]한다고 한다.

(ⅱ) 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 음의 무한대로 [ ]한다고 한다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x)=L \iff \lim_{x \to a+} f(x)=\lim_{x \to a-} f(x)=[\quad]$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\lim_{x \to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x \to a} f(x)=[\quad]$이다.

(5) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 [ ]가 같고 α의 값은 분자, 분모의 최고차항의 [ ]의 비와 같다.

2. 다음 문장이 참(true) 또는 거짓(false)인지 결정하고, 그 이유를 설명하거나 적절한 반례를 제시하여라.

(1) $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값도 존재한다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이면 $\lim_{x \to \infty} f(x)<\lim_{x \to \infty} g(x)$이다.

3. 다음 물음에 대한 답을 간단히 서술하여라.

다음 과정 중에서 처음으로 등호가 잘못 사용된 부분을 찾고, 그 이유를 설명하여라.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \times \lim_{x \to 0} x \underset{①}{=} \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} \times x\right) \underset{②}{=} \lim_{x \to 0} 1 \underset{③}{=} 1$$

EXERCISES A

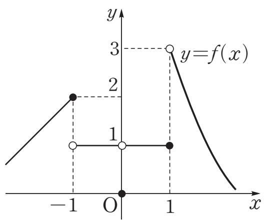
Sub Note 056쪽

함수의 극한

01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to -1+} f(x)$ (2) $\lim_{x \to -1-} f(x)$

(3) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (4) $\lim_{x \to 1} f(x)$



함수의 극한

02 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1-|x-1|}{x^2-1+|x-1|}$에 대하여 $\lim_{x \to 1+} f(x)=a$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=b$라 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

함수의 극한값의 존재

03 $x=2$에서의 극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

ㄱ. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ ㄴ. $f(x)=|x-2|$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ ㄹ. $f(x)=[x]-2$

함수의 극한에 대한 성질

04 다음 중 항상 옳은 것은?

① $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=0$이면 $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} g(x)$이다.

② $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$의 값이 존재하면 $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$의 값도 각각 존재한다.

③ $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to a} g(x)=\infty$이면 $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}=1$이다.

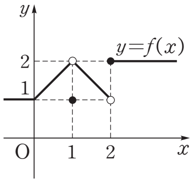
④ $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$의 값이 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값도 존재하지 않는다.

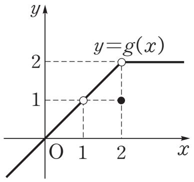
⑤ $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$, $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a} f(x)$의 값도 존재한다.

Sub Note 059쪽

01 $\lim_{x \to 0} x^2\left[\frac{1}{2x^2}\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

02 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 주어질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.





보기

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)=2$　　ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(g(x))=1$

ㄷ. $\lim_{x \to 1} g(f(x))=g(2)$　　ㄹ. $\lim_{x \to 2} g(f(x))=1$

03 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$의 값을 구하여라.

04 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}=2$일 때, $\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{4}{x^2}-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{3}{x^2}+2f\left(\frac{1}{x}\right)}$의 값을 구하여라.

05 서술형

다항함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-x}{x-1}$의 값이 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하여라.

Chapter I Exercises

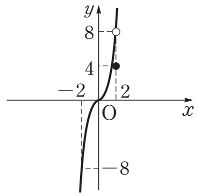
난이도 ■ : 중 ■■ : 중상 ■■■ : 상

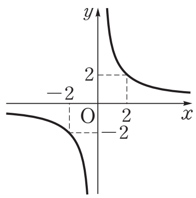
SUMMA CUM LAUDESUMMA CUM LAUDE

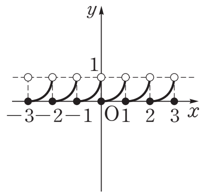
Sub Note 070쪽

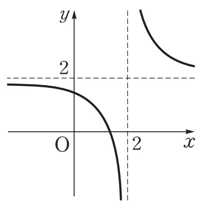
■■□

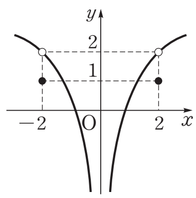
01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x\to 2}\{f(x)f(-x)\}$의 값이 존재하지 <u>않는</u> 것은?

①


②


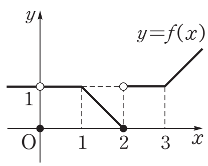
③


④


⑤


■■□

02 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(f(x)-1)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1-} f(f(x)-1)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to 1} f(f(x)-1)$의 값이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Chapter I Advanced Lecture

SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 엡실론-델타 논법에 의한 극한의 엄밀한 정의

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면, 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고 $\lim_{x \to a} f(x) = L$로 표현하였다.

그런데 '한없이 가까워진다'라는 표현은 사실 약간은 막연하고 애매한 측면이 없지 않아 보다 엄밀한 정의가 있어야 하지 않을까 하는 생각을 해 보게 된다.

그래서 이 장에서는 극한을 보다 엄밀하게 정의해 보려고 한다.

가장 일반적인 극한의 정의[1]에는 엡실론(ε)과 델타(δ)를 사용하는 방법이 있다.

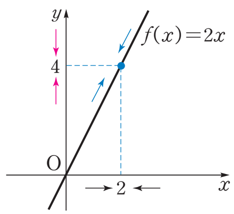
$\lim_{x \to a} f(x) = L$임을 증명하는 데 있어서 우리가 아는 지식을 사용하려면 우리는 a에 가까운 수들의 함숫값을 구해서 그 값들이 L에 점점 다가감을 보이는 정도일 것이다. 그러나 아무리 작은 구간이라 하더라도 실수는 무한하기 때문에 그러한 증명은 실제로 불가능하다. 따라서

$f(a)$ 근방[2]의 어떤 범위를 잡든 그 안에 들어오게 하는 a 근방을 잡을 수 있다

는 가능성의 증명을 하게 된 것이다.

엡실론-델타 논법에서는 '근방'이라는 표현을 좀더 수학적으로 표현하기 위해 기호 ε과 δ를 도입하고, 부등식으로 나타내게 된다.

사실 처음에는 ε과 δ가 무엇인지 감이 오지도 않고 이해하기도 쉽지 않을 것이다. 그렇다고 이해하지 못할 내용도 아니다. 그래프를 통해 서서히 이해해 보자.



오른쪽 그래프는 함수 $f(x)=2x$의 그래프이다.

그래프를 보면 직관적으로

$x \longrightarrow 2$이면 $f(x) \longrightarrow 4$

임을 쉽게 알 수 있다.

---

❶ 하지만 극한의 정의라고 해서 이를 통해 극한값을 구하는 것은 아니다. 다만 직관적으로 생각하여 구했던 극한이 맞는지 확인해 보는 방법이다. 즉, 본문에서 다룬 극한을 증명하는 방법일 뿐이다.

❷ 어떤 점에 대하여 그 점을 포함하는 적당한 열린구간. 위의 경우 '근처'라는 말로 이해해도 무방하다.

01. 극한에 대한 직관

극한값의 계산은 언제나 비(比)를 이용하고 있다. 앞서 우리는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나누어 준 다음 극한의 성질을 이용하여 계산한다고 공부했다. 이제 조금 시각을 바꾸어 접근해 보자.

> 운동선수 갑, 을은 각각 $2(\mathrm{m/s})$, $1(\mathrm{m/s})$의 속력으로 쉬지 않고 무한히 달릴 수 있는 능력이 있다. 갑, 을이 동시에 출발하여 x초 동안 달리는 거리를 각각 $f(x)(\mathrm{m})$, $g(x)(\mathrm{m})$라 한다면 시간이 무한히 흐른 후, 두 사람이 달린 거리의 비율은?

문제에 따르면 (거리)=(속력)×(시간)이므로 갑, 을이 달리는 거리를 나타내는 함수식은 $f(x)=2x$, $g(x)=x$이다.(단, $x>0$) 두 함수는 x의 값이 한없이 커질 때 모두 양의 무한대로 발산하는 함수이다. 따라서 우리는 단지 발산하고 있다는 '상태'만을 알 수 있으며 두 함수의 극한값은 알 수 없다. 하지만 두 함수의 비(比)는 알 수 있다. 갑이 을보다 2배 빠르므로 1초, 2초, ⋯, 10초, ⋯, 100초, ⋯, x초가 지나더라도 갑이 언제나 을보다 2배 앞서 있고, 아무리 오랜 시간이 흐르더라도 그 비는 변하지 않는다. 즉, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이지만 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2$이다.

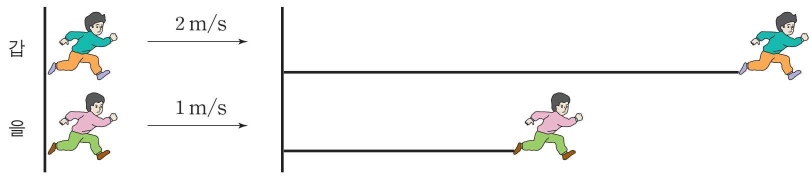


Figure_ 서로 다른 속력으로 두 사람이 x초 동안 달린 거리의 비

위의 예는 우리가 극한값을 어떻게 예측할 수 있는지를 잘 보여 주고 있다. 즉, 분모와 분자가 모두 무한대로 발산하는 함수라 해도 양수 x에 따른 그것들의 상대적인 비율은 수렴할 수 있다.

내신 · 모의고사 대비 TEST

숨마쿰라우데®

[수학 Ⅱ]

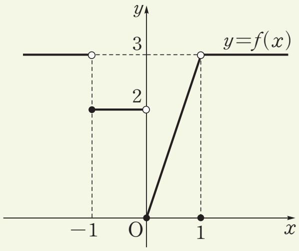
정답은 ➞ 본책의 해설지에서
해설은 ➞ 당사 홈페이지에서
확인하실 수 있습니다.
www.erumenb.com

01 함수의 극한

Sub Note 133쪽

기본 Exercises

01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

02 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x+10}-3}$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3+2x}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x^2+5}}$

03 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$x<(2x^2+x+4)f(x)<x+2$

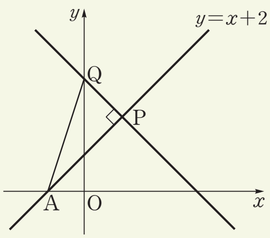
를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} xf(x)$의 값을 구하여라.

04 $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+4b$의 값을 구하여라.

05 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값을 구하여라.

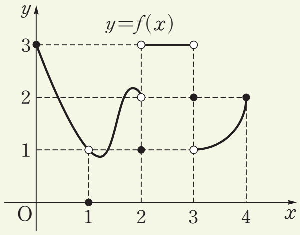
(가) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2-3}{f(x)} = \dfrac{1}{3}$　(나) $\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x^2-4}=6$

06 그림과 같이 직선 $y=x+2$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+2)$가 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+2$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값을 구하여라.



함수의 극한과 연속

01 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0+} f(f(x)) + \lim_{x \to 2+} f(f(x))$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{x}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x)}=1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{f(x)}=2$$

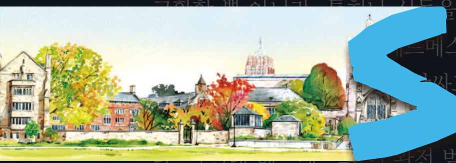
를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

04 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.



튼튼한 **개념!** 흔들리지 않는 **실력!**

숨마쿰라우데 수학Ⅱ

'제대로' 공부를 해야 공부가 더 쉬워집니다!

"공부하는 사람은 언제나 생각이 명징하고 흐트러짐이 없어야 한다. 그러자면 우선 눈앞에 펼쳐진 어지러운 자료를 하나로 묶어 종합하는 과정이 필요하다. 비슷한 것끼리 갈래로 묶고 교통정리를 하고 나면 정보간의 우열이 드러난다. 그래서 중요한 것을 가려내고 중요하지 않은 것을 추려내는데 이 과정이 바로 '종핵(綜核)'이다." 이는 다산 정약용이 주장한 공부법입니다. 제대로 공부하는 과정은 종핵처럼 복잡한 것을 단순하게 만드는 과정입니다. 공부를 쉽게 하는 방법은 복잡한 내용들 사이의 관계를 잘 이해하여 간단히 정리해 나가는 것입니다. 이를 위해서는 무엇보다도 먼저 내용을 제대로 알아야 합니다. 숨마쿰라우데는 전체를 보는 안목을 기르고, 부분을 명쾌하게 파악할 수 있도록 친절하게 설명하였습니다. 보다 쉽게 공부하는 길에 숨마쿰라우데가 여러분들과 함께 하겠습니다.

학습자 수준에 맞도록 공부하는 단계별 구성!

공부에 매진하는 학생들은 모두가 눈앞에 놓인 목표가 있습니다. 예를 들면, '과목의 개념 학습을 확실히 하여 기초를

학생의 학습 단계에 따라 선택적으로 공부할 수 있는 숨마쿰라우데만의

3단계 학습 시스템!!

고등학교 2학년을 위한 「숨마쿰라우데 수학Ⅱ」

1단계
개념 학습
누구나 쉽게 이해할 수 있는 상세한 개념 설명

2단계
문제 학습
내신·수능에 반드시 출제되는 최적의 문제 유형

3단계
심화 학습
수학적 사고 확장을 위한 교과서 심화 학습

정가 : 17,000원

53410
9 788959 904693
ISBN 978-89-5990-469-3