SUMMA CUM LAUDE

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

고등 수학 (하)

이룸이앤비
Education&Books

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

INTRODUCTION

[이 책을 펴내면서]

어떻게 하면 수학을 보다 쉽게 느끼게 할까?
이는 우리 저자들이 이 책을 집필하게 된 가장 중요한 계기입니다. 기존의 책들이
매우 간단하게 개념 설명만을 한 뒤 문제 풀이 위주로 수학을 설명하고 있기 때문에
수학은 그저 어렵고 까다로운 것으로만 느껴지게 되었습니다.

그래서 우리 저자들은 기존 책들과는 다른 방식으로 수학을 설명하고
기존의 책에서는 숨겨 놓은 아이디어들을 숨김없이 드러내고자 노력하였습니다.
상세한 설명과 저자들의 경험에서 우러나온 충고들은 수학에 어려움을 가진
독자라 하더라도 고등학교 수학을 제대로 이해할 수 있도록 할 것입니다.
또한 수학 실력이 좋은 독자에게는 교과서나 참고서 등을 풀어 보면서
막연히 생각했던 아이디어를 체계적이고 깊이 있게 이해하도록 도움을 줄 것입니다.
관련된 개념들을 통해 충분히 이해할 수 있도록 설명하였기 때문에,
교과서와 이 책 한 권이면 수학의 개념을 스스로 공부하는 데 어려움이 없을 것이라 믿습니다.

수학도 일종의 언어입니다. 한글 대신 수학 기호를 이용해 의미를 전달하고 소통하는 것입니다.
때문에 수학을 제대로 읽고 쓰기 위해서는 하나의 낯선 언어를 배우는 것만큼의 노력을 해야 합니다.
손으로 많이 쓰고 많이 생각해야 하는 학문이므로, 수학(數學)이 아닌 수학(手學)이라고 해도 어색하지 않습니다.
특히 고1 대상의 수학(상), 수학(하)는 고2, 고3 과정 수학의 초석이 된다는 점에서 매우 중요합니다.
여기에서 나오는 수학의 기호나 용어들이 앞으로 공부할 단계에서도 계속 등장하기
때문에 이 책에서 다룬 수학 개념을 잊거나, 알긴 알더라도 문제에 적용하는 데 익숙하지 않다면
앞으로 수학 공부에 흥미를 갖게 되기는 쉽지 않을 것입니다. 따라서 많이 써보고 많이 생각해 보면서
이 책을 읽어나가길 바랍니다. 이 책을 다 보았을 즈음엔, 숫자와 기호와 문자로 이루어진
재미있는 수학 이야기를 읽었다는 느낌을 받을 수 있고, 더 나아가 스스로
그 이야기를 써낼 수도 있게 될 것입니다.

부디 그 수준이 될 때까지 수학에 흥미를 잃지 않길 바라며,
이 책이 모든 학생들이 수학에 흥미를 갖게 되는 시금석이 되기를 간절히 기원합니다.

– 저자 일동 –

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]

01 집합과 원소

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

01 개념 학습

수학 학습의 기본은 개념에 대한 완벽한 이해입니다. 단원을 개념의 기본이 되는 소단원으로 분류하여, 기본 개념을 확실하게 이해할 수 있도록 설명하였습니다. 〈공식의 정리〉와 함께 〈공식이 만들어진 원리〉, 학습 선배인 〈필자들의 팁〉, 문제 풀이시 〈범하기 쉬운 오류〉 등을 설명하여 확실한 개념 정립이 가능하도록 하였습니다.

EXAMPLE 001 다음 중 집합이 아닌 것은?

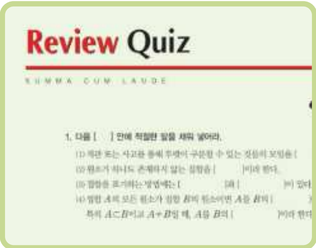
APPLICATION 001 다음 중 집합이 아닌 것은?

02 EXAMPLE & APPLICATION

소단원에서 공부한 개념을 적용할 수 있도록 가장 적절한 〈EXAMPLE〉을 제시하였습니다. 다양한 접근 방법이나 추가 설명을 통해 개념을 확실하게 이해하고 넘어가도록 하였습니다. EXAMPLE에서 익힌 방법을 적용하거나 응용해 봄으로써 개념을 탄탄하게 다질 수 있도록 APPLICATION을 제시하였습니다.

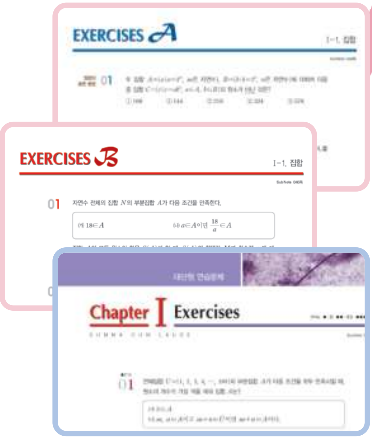
03 기본예제 & 발전예제

탄탄한 개념이 정리된 상태에서 본격적인 수학 단원별 유형을 익힐 수 있습니다. 대표적인 유형 문제를 〈기본예제〉와 〈발전예제〉로 구분해 풀이 GUIDE와 함께 그 해법을 보여 주고, 같은 유형의 〈유제〉 문제를 제시하여 해당 유형을 완벽하게 연습할 수 있습니다. 또, 〈Summa's advice〉에 보충설명을 제시하여 실수하기 쉬운 사항, 중요한 추가적인 설명을 덧붙여 해당 문항 유형에 철저하게 대비할 수 있도록 하였습니다.



04 중단원별 Review Quiz

소단원으로 나누어 공부했던 중요한 개념들을 중단원별로 모아 괄호 넣기 문제, 참 · 거짓 문제, 간단한 설명 문제 등을 제시하였습니다. 이는 중단원별로 중요한 개념을 다시 한번 정리하여 전체를 보는 안목을 유지할 수 있도록 해 줍니다.



05 중단원별, 대단원별 EXERCISES

이미 학습한 개념과 유형문제들을 중단원과 대단원별로 테스트하도록 하였습니다. 〈난이도별〉로 A, B단계로 문항을 배치하였으며, 내신은 물론 수능 시험 등에서 출제가 가능한 문제들로 구성하여 정확한 자신의 실력을 측정할 수 있습니다. EXERCISES를 통해 부족한 부분을 스스로 체크하여 개념 학습으로 피드백하면 핵심 개념을 보다 완벽히 정리할 수 있습니다.

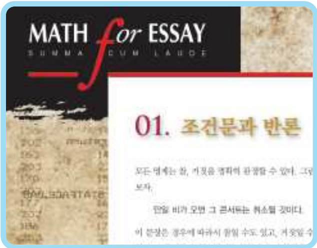
06 Advanced Lecture(심화, 연계 학습)

고1의 학습 단계인 수학(상), 수학(하)는 고등학교 수학의 끝이 아니며, 앞으로 배울 내용들의 기본이 되는 학습 단계입니다. 이 부분에서는 앞으로 학습할 상위 단계의 내용과 연계된 내용을 제시하고 있습니다. 특히 고1 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 설명하여 수학 실력이 보다 향상될 수 있도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

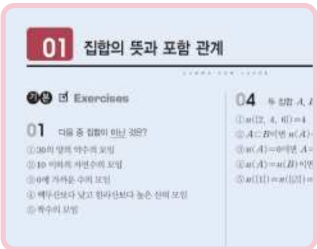
STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]



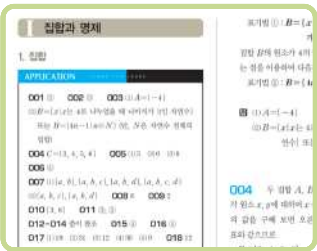
07 MATH for ESSAY

고1 수준에서 연계하여 공부할 수 있는 수리 논술, 구술에 관련된 학습 사항을 제시하였습니다. 앞의 심화, 연계 학습과 더불어 좀 더 수준 있는 수학을 접하고자 하는 학생들을 위해 깊이 있는 수학 원리 학습은 물론 입시에서 강조되는 〈수리 논술, 구술〉에도 대비할 수 있도록 하였습니다.



08 내신 · 모의고사 대비 TEST

수학 공부에서 많은 문제를 접하여 적응력을 키우는 것은 원리를 이해하는 것과 함께 중요한 수학 공부법 중 하나입니다. 이를 위해 별도로 단원별 우수 문제를 〈내신 · 모의고사 대비 TEST〉를 통해 추가로 제공하고 있습니다. 단원별로 자신의 실력을 측정하거나, 중간 · 기말 시험 및 각종 모의고사에 대비하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.



09 SUB NOTE – 정답 및 해설

각 문제에 대한 좋은 해설은 문제풀이 만큼 실력 향상을 위해 필요한 요소입니다. 해당 문제에 대해 가장 적절하고 쉬운 풀이 방법을 제시하였으며, 알아두면 도움이 되는 추가적인 풀이 방법 역시 제시하여 자학자습을 위한 교재로 손색이 없도록 하였습니다.

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

[이 책의 차례]

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

숨마쿰라우데® [수학 (하)]

CHAPTER Ⅱ. 함수

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

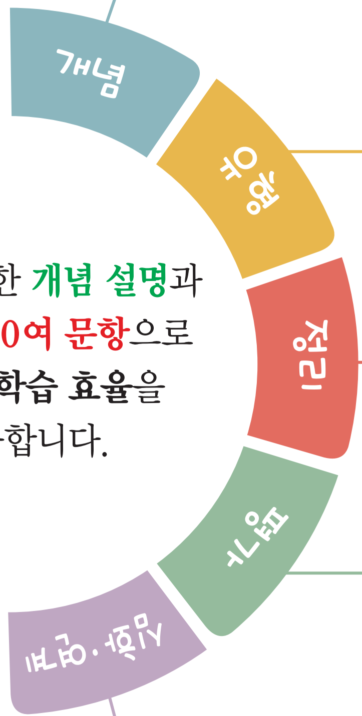
[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅲ. 경우의 수

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STUDY SYSTEM

[수학 학습 시스템]



쉽고 상세한 **개념 설명**과
엄선된 **960여 문항**으로
최고의 학습 효율을
제공합니다.

단원 개념 학습 단계

EXAMPLE
APPLICATION

필수 유형 학습 단계

기본, 발전예제
유제

단원 학습 정리 단계

중단원별 Review Quiz
중단원별 EXERCISES
대단원별 Exercises

최종 실력 테스트 단계

내신 · 모의고사 대비 TEST

심화, 연계 학습 단계

Advanced Lecture
MATH for ESSAY

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

수학 공부법 특강

상위 1%를 향한 기적의 수학 학습법

www.erumenb.com

"폐하, 학문에는 왕도(王道)가 없습니다." 이것은 유클리드가 프톨레마이오스 왕에게 기하학을 가르치며 한 말이다. 필자는 이 말을 때때로 떠올릴 정도로 좋아한다. 공부에는 속임수도, 조작도 없다는 말, 충실하게 끈기를 가지고 공부한 자에게 상이 돌아간다는 말이기 때문이다. 이 말은 수학에도 그대로 적용되어 '열심히 공부하면 수학 점수를 올릴 수 있으리라.'는 희망을 품게 한다. 그런데 여기서 꼭 염두에 두어야 할 것이 있으니, 바로 '단순하게 열심히'가 아니라 올바른 방법, 즉 정도(正道)에 따라 공부해야 한다는 것이다.

고등학생이면 누구나 공부하고 있다. 누구나 열심히 하고 있다고 말한다. 그런데 누구는 성적이 잘 나오고 누구는 안 나온다. 이쯤 되면 성적이 안 나오는 학생들은 "수학은 재능 있는 학생들이나 할 수 있는 거야!"라면서 포기하려고 한다. 무엇이 문제일까?

바로 정도(正道)인가 아닌가의 문제이다.

이 책을 보고 있을 대다수 학생들은 아직 수학을 공부하는 정도(正道)를 잘 모를 것이다. 여기에 소개한 방법들은 경험에서 우러나온 것으로 실현 가능성이 충분히 높으니 이를 토대로 자신만의 공부법을 완성해 보길 바란다. 지면상 소개할 방법은 몇 가지에 불과하다. 하지만 필수적인 것이기에 이를 실천에 옮기면 효과는 기대 이상일 것이다.

정도 1 외울 것은 철저하게 외우고, 이해할 것은 철저하게 이해하라.

수학은 **정의(定意)**를 바탕으로 **추론(追論)**을 이끌어내고, 추론을 바탕으로 **정리(定理)**를 만들어내는 학문이다. 즉, 논의의 출발점이 되는 정의는 이해해야 할 뿐만 아니라 정확히 암

기해야 하며, 정의에서 추론을 거쳐 정리가 유도되는 과정은 집요하게 물고 늘어져서 그 과정을 정확하게 이해하고, 스스로의 힘으로 그 과정을 기술할 수 있도록 연습해야 한다. 하지만 안타깝게도 많은 학생들은 **정의**를 볼 때는 '수학은 이해가 중요하다지. 이런 건 안 외워도 될 거야.'라고 생각하고, **정리**가 유도되는 과정을 볼 때는 '너무 어렵다. 이해가 안 되더라도 무작정 외우다 보면 어느 순간 이해가 된다고 어디서 들은 거 같아. 그냥 외우자.'며 공식만을 무작정 외운다. 바로 이 잘못된 습관 때문에 번번이 수학에 발목이 잡혔던 것이다. 「숨마쿰라우데 수학 시리즈」는 외워야 하는 부분과 이해해야 하는 부분을 정확히 구별시켜 주는 데 중점을 두고 집필되었다. 이 책을 통해 잘못된 암기와 이해의 경계가 바로 잡히길 바란다.

정도 2 개념 정리와 문제 풀이 사이의 시간의 텀(term)을 최소화하라.

개념 정리가 머릿속에 **입력**(input)하는 과정이라면, 문제를 푸는 것은 배운 것을 **출력**(output)하는 과정이다. input과 output은 항상 동시에 이루어져야 한다. 하지만 필자의 경험으로 볼 때 output 과정을 연습하는 것은 input 과정보다 몇 배로 힘들다. input은 편하게 강의를 듣거나 책을 읽기만 하면 되지만, output은 강의나 책에서 보았던 내용을 스스로의 힘으로 이끌어 내어야 하기 때문이다. 그러다 보니 많은 학생들은 힘든 과정인 output보다는 평이한 과정인 input 중심으로 학습 계획을 세우게 된다. '이번 시험 범위가 1~3단원이지. 일단 1~3단원까지 기본서를 쭉 다 읽어본 다음에 문제집을 풀어야지.'라는 식으로 계획을 세우는 경우가 많다. 그리고 이러한 방식으로 공부를 했던 학생들의 대부분은

'기본서 뒷부분을 볼 때쯤 되니 앞부분에서 무엇을 공부했는지 기억이 안 나요.'

'난 분명히 개념 정리를 했는데, 문제를 풀려고 하니 뭘 배웠는지 생각이 안 나요.'

하는 기억상실 증상을 보이는 경우가 많다. 한 단원의 개념을 정리했다면 그 단원의 내용들을 잊어버리기 전에 해당 단원의 문제들을 많이 풀도록 하자. 개념 정리와 문제 풀이 사이의 간격이 길어질수록 비효율적인 공부가 될 가능성이 크기 때문이다.

수학(數學)은 수학(手學)이기도 하다.

손 연습이 바탕이 되지 않는 수학 공부는 사상누각(沙上樓閣)이다.

정도 3 배운 것을 하나로 모으는 습관, 노트 정리가 답이다.

많은 학생들이 신학기가 되면 노트 정리를 시도하지만 한 달쯤 지나면 슬그머니 정리를 포기하곤 한다. 노트 정리가 중요하다는 말은 어디서 들은 거 같은데, 구체적으로 정리란 것을 어떻게 해야 하는지에 대해서는 들어본 적이 없기 때문일 것이다.

노트를 정리한다는 것은 요점을 정리한다는 것이다. 즉, 노트 정리를 할 때는 시시콜콜하게 모든 내용을 적을 필요는 없다. 그러다 보면 금방 지쳐버리게 되고, 노트의 효율도 떨어지게 된다. 노트 정리의 핵심 원칙은 다음과 같다.

❶ 노트를 정리할 때 이미 알고 있는 내용은 적지 말고, 빈칸으로 남겨 놓자.

이미 알고 있는 내용을 또다시 적다 보면 적지 않은 시간이 낭비될뿐더러, 아픈 팔을 붙잡고, '내가 이것을 통해 무엇을 얻었지?'라는 회의가 들면서 결국 노트 정리를 포기하게 된다. 따라서 이미 알고 있는 내용들은 노트에 적지 말자. 대신 빈칸으로 남겨놓고, 노트의 빈칸을 볼 때마다 '이곳에 들어가야 할 것이 무엇인가?'를 떠올리도록 하자. 필자의 중학교 2학년 때 수학 선생님은 '시험 기간이 되면 항상 목차를 펴고, 그동안 공부했던 내용을 머릿속으로 쭉 정리했다.'라는 자신의 공부 경험을 이야기해 주시곤 했다. 필자가 그동안 공부한 기억을 되살려보더라도 이것은 효율적인 공부법 중 하나이다. 머릿속의 지식을 끄집어내어 노트의 빈칸을 채워나가는 것 또한 마찬가지이다.

❷ 내가 시험장에서 만났을 때 실수할 것만 같은 내용들, 문득 공부를 하다가 갑자기 깨닫게 된 내용들을 노트에 적어야 한다.

당장 아픈 곳은 배인데, 종합 영양제를 먹으면서 체력을 튼튼하게 하는 사람은 없다. 공부도 이와 마찬가지이다. 시험이란 점수를 깎으려는 출제자와 만점을 쟁취하려는 수험생의 대결로 볼 수 있다. 즉, 시험을 코앞에 두고 공부할 때는 약점들을 집중적으로 공략하고 보강해야 한다. 평소에 조금씩 자신의 약점이 무엇인지 노트를 통해 정리하는 습관을 들이자. 시험 때 상당한 도움이 될 것이다.

❸ 한술 밥에 배부를 수 없다.

필자는 굉장히 치밀하고 꼼꼼하게 정리된 노트를 몇 권 가지고 있다. 필자의 노트를 보고 자극을 받아서 노트 정리를 시작했다가 생각처럼 근사하게 만들어지지 않자, 제풀에 지쳐서 노트 정리를 포기하는 학생을 종종 보곤 한다. 모든 공부가 마찬가지겠지만 어느 정도의 내공이 쌓였을 때서야 비로소 그 과목을 다양한 각도로 분석할 수 있다. 즉, 처음 공부를 시작하는 입장에서 완벽한 노트 정리를 하기란 쉽지 않다. 조급해하지 말고 평소에 조금씩 노트 정리를 하는 습관을 들이도록 하자. 로마가 하루아침에 만들어진 것이 아닌 것처럼, 멋진 정리 노트 또한 하루아침에 만들어질 수 없다. 거북이처럼 느리더라도 한 걸음씩 나아가는 사람이 승리한다는 사실을 명심하자.

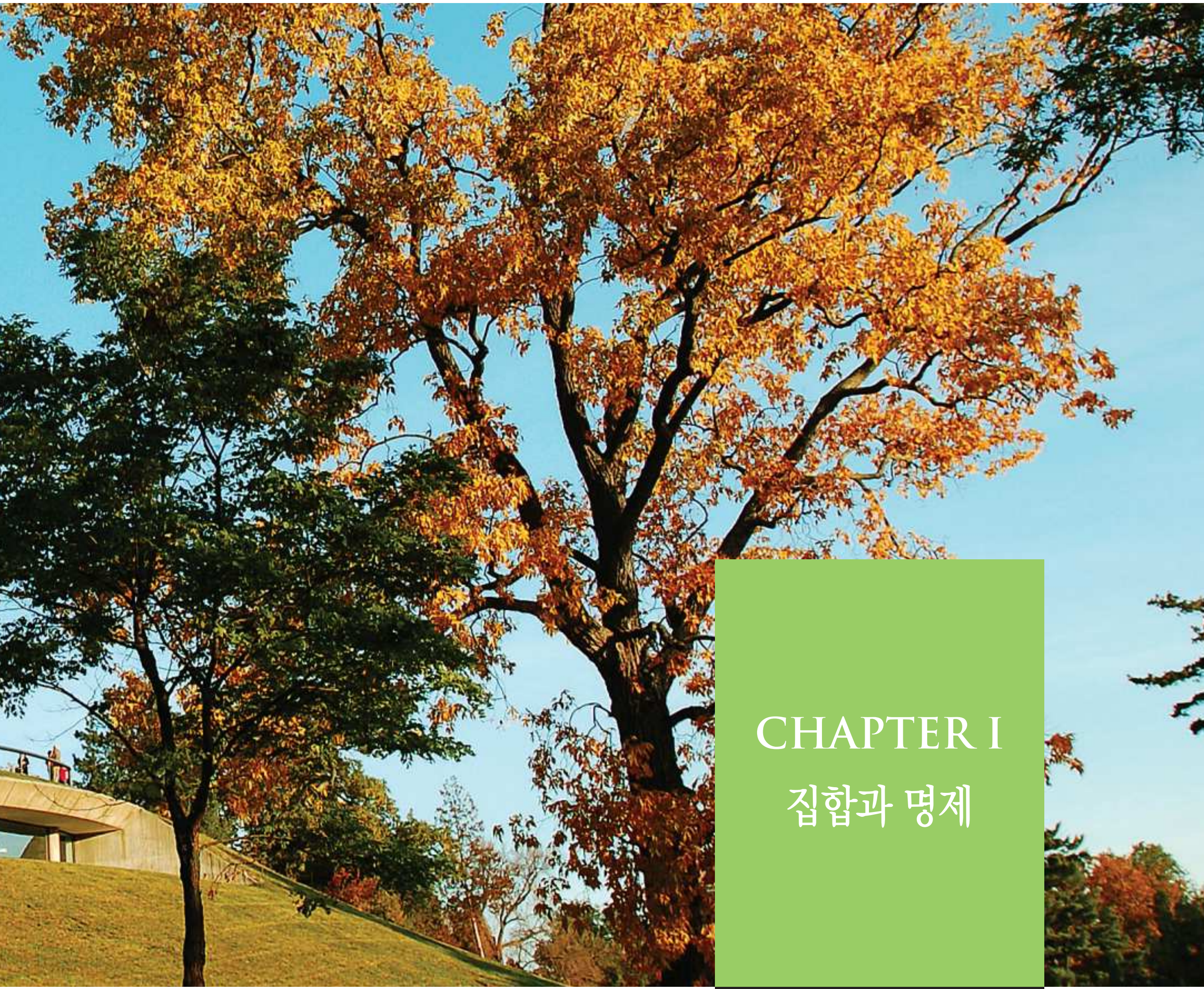
정도 4 틀린 문제를 재음미하는 습관을 들여라.

상당수의 학생들은 틀린 문제를 반복하여 틀리는 경향이 있다. 이것은 그저 틀린 문제의 해설을 한 번 훑어보는 정도로는 자신의 실력 향상에 도움이 되지 않는다는 뜻이다. 틀린 문제는 오랜 시간 곱씹어 보면서 문제 해결의 핵심이 무엇이고, 내가 약했던 부분이 무엇이었는지를 꼼꼼하게 정리해주어야 한다. 다음은 수학 문제를 푸는 데 요구되는 사고 과정을 편의상 세 가지로 구분한 것이다. 이를 참고하여 틀린 문제를 볼 때는 항상 어느 부분이 부족했던 것인지 정확하게 체크하고 노트의 해당 부분에 추가하여 적는 습관을 들이도록 하자.

(1) 단순히 개념을 묻는 문제인가?	기본서에 나온 정의, 개념, 증명 등 수학 문제를 풀기 위한 밑천이 되는 부분에 관한 문제인지 살핀다. 기본을 모르고서야 발전해 나갈 수 없다.
(2) 문제의 핵심을 꿰뚫었는가?	틀린 문제의 해설을 볼 때 '아, 이렇게 간단한 것을……' 하며 아쉬워하는 경우가 종종 있다. 어째서 아는 내용인데도 풀지 못하는 것일까? 그것은 머릿속에 입력시킨 내용을 적절한 상황에 맞게 끄집어내지 못했기 때문이다. 수학 문제를 풀 때는 제시된 조건을 읽어 내려가면서 이 문제가 무엇을 묻고 싶어 하는지 자신이 배운 지식과 연관 지어서 해석해내는 능력이 필요하다.
(3) 전략을 바르게 세웠는가?	문제를 많이 풀다 보면 다음과 같이 경험적으로 얻게 되는 요령들이 있다. 이러한 요령들이 해결 전략으로 큰 몫을 한다. "두 개 이상의 조건이 변하고 있을 때는 일단은 하나를 고정시키고 생각해 보자." "문제의 뜻이 이해되지 않을 때는 구체적인 숫자를 대입해서 문제가 시키는대로 해 보자." "변하지 않는 요소를 기준으로 살피자." "아주 극단적인 경우 혹은 아주 일반적인 경우가 답이다."

정도 5 문제를 푸는 스킬을 찾기 전에는 해설을 보지 마라.

문제가 안 풀린다고 덜컥 해설을 보면 실력이 늘지 않는다. 문제가 풀리지 않을 때는 일단 그 문제를 접어놓았다가 하루 혹은 이틀 정도 지난 뒤에 다시 도전해 보자. 그러면 대부분 예전보다 쉽게 풀리는 것을 느낄 수 있을 것이다. 또한, 하나의 문제에 있어서 다양한 풀이를 생각해 보자. 상위권으로 도약하기 위해서 반드시 필요한 과정이다. 출제자와 선의의 경쟁을 한다는 마음으로 자신의 풀이와 해설의 풀이 중 어느 것이 효율적인지를 비교해 보자. 이 외에도 여러 가지 방법이 있겠지만 무엇보다 중요한 것은 하고자 하는 마음이다. 그 마음으로 지금 이 순간부터 시작한다면 분명 어제보다 나은 오늘의 나를 발견하게 될 것이다.



CHAPTER I
집합과 명제

숨마쿰라우데®
[수학 (하)]

1. 집합
2. 명제

INTRO to Chapter Ⅰ

집합과 명제

SUMMA CUM LAUDE

집합과 명제는 논리학의 기초이다. 수학에서 수많은 명제의 참, 거짓을 판단하는 기초는 집합 사이의 포함 관계이다. 집합을 바탕으로 새로운 명제의 참, 거짓을 추론해 나가면서 점차 논리적으로 사고하는 능력이 길러진다.

본 단원의 구성에 대하여...

Ⅰ. 집합과 명제	1. 집합	01 집합과 원소 02 집합의 연산 ● Review Quiz ● EXERCISES
	2. 명제	01 명제와 조건 02 명제의 역과 대우 03 대우를 이용한 증명법과 귀류법 04 충분조건과 필요조건 05 절대부등식 ● Review Quiz ● EXERCISES
	● **대단원 연습문제** ● **대단원 심화, 연계 학습** TOPIC (1) 동치 명제 TOPIC (2) 도형을 이용한 부등식의 증명 ● **논술, 구술 자료** 01. 조건문과 반론	

수학은 추상 언어이다.

독자들은 '해리포터'나 '반지의 제왕', '드래곤라자' 등의 환상 소설(Fantasy Novel)을 읽어본 경험이 있는가? 환상 소설을 읽다 보면

메모라이즈(memorize), 롱 소드(long sword), 대거(dagger), 오크(Orc)

등의 낯선 용어를 자주 만나게 된다. 누구나 처음엔 이러한 용어들에 이질감을 느끼고 '이 책을 손에서 놓을까?' 하는 고민을 하게 된다. 하지만 약간의 불편함을 참고 독서를 계속한 끈기 있는 독자들은 흥미진진한 이야기에 몰입하여 식사까지 걸러가며 책을 읽고 있는 자신

01 집합과 원소

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

1 집합과 원소

(1) 집합 : 주어진 조건에 의해 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임

(2) 원소 : 집합을 이루고 있는 대상 하나하나

(3) 집합과 원소 사이의 관계

① a가 집합 A의 원소일 때 : $a\in A$ ② a가 집합 A의 원소가 아닐 때 : $a\notin A$

2 집합의 표현 방법

(1) 원소나열법 : $\{\quad\}$ 안에 집합의 모든 원소를 나열하는 방법

(2) 조건제시법 : $\{x\,|\,x$의 조건$\}$과 같이 $\{\quad\}$ 안에 원소들의 공통된 성질을 제시하는 방법

(3) 벤다이어그램 : 원이나 직사각형 등의 도형을 이용하여 그림으로 집합을 나타내는 방법

3 집합의 분류

(1) 집합의 분류

① 유한집합 : 원소의 개수가 유한개인 집합

② 무한집합 : 원소의 개수가 무한히 많은 집합

③ 공집합 : 원소가 하나도 없는 집합 (기호 : $\varnothing$)

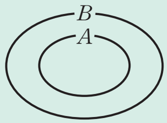
(2) 유한집합 A의 원소의 개수는 기호로 $n(A)$와 같이 나타낸다.

4 집합 사이의 포함 관계

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하면 집합 A는 집합 B의 부분집합이다.

① A가 B의 부분집합일 때 : $A\subset B$

② A가 B의 부분집합이 아닐 때 : $A\not\subset B$



$A\subset B$

(2) 부분집합의 성질 : 세 집합 A, B, C에 대하여

① $\varnothing\subset A$, $A\subset A$ ② $A\subset B$이고 $B\subset C$이면 $A\subset C$이다.

(3) 서로 같은 집합 : 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$이면 A와 B는 서로 같다고 하고 $A=B$로 나타낸다.

(4) 진부분집합 : 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $A\neq B$이면 A는 B의 진부분집합이다.

5 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$일 때

(1) 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^n (2) 집합 A의 진부분집합의 개수 : 2^n-1

(3) 특정한 원소 m개를 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^{n-m} (단, $m\le n$)

(4) 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^{n-l} (단, $l\le n$)

1 집합과 원소

집합(set)이란 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 말한다.
'대상을 분명히 알 수 있다.' 는 말의 의미는 다음 두 문장을 비교해 보면 뚜렷하다.

키가 큰 사람들의 모임 ← '크다' 의 기준이 불분명하므로 집합이 아니다.

키가 160 cm보다 큰 사람들의 모임 ← 대상이 명확하므로 집합이다.

1895년 독일의 수학자 칸토어(1845~1918)에 의해 집합론이 처음으로 발표되었으며 당시 칸토어는 집합을 다음과 같이 정의하였다.

> 직관이나 사고를 통해 명확히 구별할 수 있는 대상을 하나의 전체로 묶어 놓은 것

EXAMPLE 001 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 우리나라 광역시의 모임
② 정글고등학교 졸업생의 모임
③ 김수현과 닮은 사람들의 모임
④ 김 씨 성을 가진 사람들의 모임
⑤ 숨마쿰라우데 수학시리즈 저자들의 모임

ANSWER ③ '김수현과 닮은'이라는 기준은 불분명하므로 대상이 명확히 구분된다고 볼 수 없다. 사람에 따라 판단이 달라질 수 있기 때문이다. 즉, 집합이 아닌 것은 ③이다. ■

APPLICATION 001 다음 중 집합이 아닌 것은? Sub Note 002쪽

① 혈액형이 AB형인 사람들의 모임
② 수학을 잘 하는 사람들의 모임
③ 키가 190 cm 이상인 사람들의 모임
④ 출생지가 서울인 사람들의 모임
⑤ 고등학생들의 모임

원소(element)란 집합을 이루는 대상 하나하나를 말한다.
비유하자면 집합은 바구니이고, 원소는 그 바구니에 담긴 공이다.
a가 집합 A의 원소일 때, 'a는 집합 A에 속한다' 고 하고, 기호로 $\boldsymbol{a \in A}$와 같이 나타낸다.[1]
또 b가 집합 A의 원소가 아닐 때, 'b는 집합 A에 속하지 않는다' 고 하며, 기호로 $\boldsymbol{b \notin A}$와 같이 나타낸다.

Sub Note 002쪽

APPLICATION 002 40보다 작은 6의 양의 배수의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $6 \notin A$ ② $10 \in A$ ③ $24 \in A$ ④ $30 \notin A$ ⑤ $40 \in A$

[1] 집합은 주로 A, B, C, $\cdots$ 등의 알파벳 대문자를 쓰고, 원소는 a, b, c, $\cdots$ 등의 알파벳 소문자를 쓴다.
여기서 $\in$는 원소라는 뜻을 가진 영문자 Element의 첫 글자 E에서 따온 기호이다.

기 본 예 제 **부분집합의 개수 (1)**

004 집합 $A=\{x|x$는 5 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 집합 A의 부분집합 중 1과 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

(2) 집합 A의 부분집합 중 1과 2를 원소로 갖는 부분집합의 개수

(3) 집합 A의 부분집합 중 1과 2는 원소로 갖지 않고, 3은 원소로 갖는 부분집합의 개수

GUIDE 원소가 n개인 집합에서 특정한 원소 m개는 원소로 갖고, 특정한 원소 l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-m-l}이다. (단, $m+l\le n$)

SOLUTION

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(1) 집합 A의 부분집합 중 1과 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A에서 원소 1과 2를 뺀 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$ ■

(2) 집합 A의 부분집합 중 1과 2를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A에서 원소 1과 2를 뺀 집합 $\{3, 4, 5\}$의 각 부분집합에 두 원소 1, 2를 넣으면 되므로 구하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ ■

(3) 집합 A의 부분집합 중 1과 2는 원소로 갖지 않고, 3은 원소로 갖는 부분집합은 집합 A에서 원소 1, 2, 3을 뺀 집합 $\{4, 5\}$의 각 부분집합에 원소 3을 넣으면 되므로 구하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2-1}=2^2=4$ ■

Summa's Advice

GUIDE에서 소개한 공식을 덮어놓고 외우는 학생들이 많다. 부분집합을 만든다는 것은 본래의 집합에서 몇 개의 원소를 선택하여 새로운 집합을 만드는 것과 같고, 각각의 원소의 입장에서 보면 새로운 집합에 들어갈지 말지 2가지 선택을 할 수 있는 상황이다. 이때 선택 또는 미선택이 결정된 원소들은 1가지 선택으로 고정된 상황이므로 2^{n-m-l}임이 유도된다.
덮어놓고 외우지 말자!

유제 Sub Note 018쪽

004-1 집합 $A=\{x|x$는 18의 양의 약수$\}$의 부분집합 중 2 또는 6을 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

발전예제 유한집합의 원소의 개수－포제의 원리

010 50명의 학생들에게 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 세 문제를 풀게 하였다. 문제 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ을 맞힌 학생은 각각 30명, 25명, 43명이었고, 세 문제를 모두 틀린 학생은 4명, 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생은 20명이었다. 이때 세 문제를 모두 맞힌 학생 수를 구하여라.

GUIDE Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 문제를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C로 놓고, 주어진 조건을 세 집합 A, B, C를 사용하여 나타내 본다.

SOLUTION

학생 전체의 집합을 U, Ⅰ 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, Ⅱ 문제를 맞힌 학생의 집합을 B, Ⅲ 문제를 맞힌 학생의 집합을 C라 하면

Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 문제를 맞힌 학생은 각각 30명, 25명, 43명이므로

$$n(A)+n(B)+n(C)=30+25+43=98 \quad \cdots\cdots ㉠$$

4명의 학생은 세 문제를 모두 틀렸으므로

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)=50-4=46 \quad \cdots\cdots ㉡$$

세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생은 20명이므로

$$\{n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)\}+\{n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}+\{n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)\}$$

$$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)=20$$

$$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=20+3\times n(A\cap B\cap C) \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 포제의 원리

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$$46=98-\{20+3\times n(A\cap B\cap C)\}+n(A\cap B\cap C)$$

$$46=78-2\times n(A\cap B\cap C) \qquad \therefore n(A\cap B\cap C)=16$$

따라서 세 문제를 모두 맞힌 학생 수는 **16**이다. ■

유제 **010-1** Sub Note 019쪽

100명의 학생 중 박보검을 좋아하는 학생이 70명, 이종석을 좋아하는 학생이 60명이다. 박보검과 이종석을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

1. 다음 [ ] 안에 적절한 말을 채워 넣어라.

(1) 직관 또는 사고를 통해 뚜렷이 구분할 수 있는 것들의 모임을 [ ]이라 한다.

(2) 원소가 하나도 존재하지 않는 집합을 [ ]이라 한다.

(3) 집합을 표기하는 방법에는 [ ]과 [ ]이 있다.

(4) 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소이면 A를 B의 [ ]이라 한다.
특히 $A\subset B$이고 $A\neq B$일 때, A를 B의 [ ]이라 한다.

2. 다음 문장이 참(true) 또는 거짓(false)인지 결정하고, 그 이유를 설명하거나 적절한 반례를 제시하여라.

(1) 모든 집합은 원소나열법으로 표현할 수 있다.

(2) 임의의 집합 A에 대하여 $A\subset A$가 성립한다.

(3) $(A\cup B)^C=A^C\cup B^C$이다.

3. 다음 물음에 대한 답을 간단히 서술하여라.

(1) '두 집합 A, B가 서로소이다.'와 '두 자연수 a, b가 서로소이다.'의 정의를 써라.

(2) 두 집합 A, B에 대하여 $A=B$의 정의를 써라.

(3) 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 '$A\subset B$'를 집합 A, B, U, $\varnothing$와 집합의 연산을 이용하여 다른 방식으로 나타내어라.

(4) 유한집합 X의 원소의 개수를 $n(X)$라 표기할 때, $n(A\cup B\cup C)$를 집합 A, B, C와 집합의 연산을 이용하여 다른 방식으로 나타내어라.

EXERCISES A

Sub Note 044쪽

집합의 표현 방법

01 두 집합 $A=\{a|a=3^m$, m은 자연수$\}$, $B=\{b|b=2^n$, n은 자연수$\}$에 대하여 다음 중 집합 $C=\{c|c=ab^2$, $a\in A$, $b\in B\}$의 원소가 아닌 것은?

① 108 ② 144 ③ 216 ④ 324 ⑤ 576

집합의 표현 방법

02 자연수 n에 대하여 집합 A_n을 $A_n=\left\{x \,\middle|\, \left[\dfrac{x}{n}\right]=2,\ x\text{는 자연수}\right\}$라 할 때, 집합 A_2를 원소나열법으로 나타내어라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

집합 사이의 포함 관계

03 두 집합 $A=\{5, -x\}$, $B=\{x^2+4, x+8, 3\}$에 대하여 $A\subset B$가 성립할 때, 정수 x의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

집합을 원소로 갖는 집합

04 집합 $X=\{3, \{3\}, \varnothing\}$에 대하여 $P(X)=\{A|A\subset X\}$라 정의할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing\in P(X)$ ② $\{\varnothing\}\in P(X)$ ③ $\{3\}\subset P(X)$
④ $\{\{3\}\}\subset P(X)$ ⑤ $\{\{3\}\}\in P(X)$

부분집합의 개수

05 다음 조건을 만족하는 공집합이 아닌 집합 A의 개수를 구하여라.

> (가) 집합 A는 집합 $\{x|x$는 음이 아닌 정수$\}$의 부분집합이다.
> (나) $a\in A$이면 $7-a\in A$이다.

Sub Note 046쪽

01 자연수 전체의 집합 N의 부분집합 A가 다음 조건을 만족한다.

(가) $18 \in A$	(나) $a \in A$이면 $\frac{18}{a} \in A$

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$라 할 때, $S(A)$의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 $M+m$의 값을 구하여라.

02 집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중 적어도 한 개의 모음을 원소로 갖는 집합의 개수를 구하여라.

03 집합 X에 대하여 $P(X)=\{A \mid A \subset X\}$라 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 임의의 집합 X에 대하여 $\varnothing \subset P(X)$이다.
ㄴ. 임의의 집합 X에 대하여 $\varnothing \in P(X)$이다.
ㄷ. 공집합이 아닌 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$일 때, $x \in (A \cap B)$이면 $\{x\} \subset P(A \cap B)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 서술형

두 집합 $X=\{3, x-1, x^2-2\}$, $Y=\{2, 3, x-2\}$에 대하여

$$(X-Y) \cup (Y-X)=\{0, 1\}$$

이다. 집합 X의 모든 원소의 합을 s라 할 때, $x+s$의 값을 구하여라.

05 전체집합 U의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$일 때, 다음 중 $(A \cup B^C) \cap (A^C \cup B)$와 서로소인 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $B-A$

Chapter Ⅰ Exercises

난이도 ■ : 중 ■■ : 중상 ■■■ : 상

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 054쪽

■□□
01 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 원소의 개수가 가장 적을 때의 집합 A는?

(가) $3\in A$
(나) $m, n\in A$이고 $m+n\in U$이면 $m+n\in A$이다.

① $A=\{3, 9, 15, 21, \cdots, 99\}$ ② $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots, 99\}$
③ $A=\{3, 4, 5, 6, \cdots, 100\}$ ④ $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 99\}$
⑤ $A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$

■■□
02 자연수 n에 대하여 집합 A_n을 $A_n=\{x|x$는 n과 서로소인 자연수$\}$라 할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기 ㄱ. $A_2=A_4$ ㄴ. $A_3=A_6$ ㄷ. $A_6=A_3\cap A_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

■■□
03 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 서로 다른 두 부분집합 X, Y에 대하여 $(X\cup Y)-(X\cap Y)$의 가장 작은 원소가 X에 속할 때, $X\Rightarrow Y$라 하자. U의 세 부분집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 5\}$, $C=\{2, 4, 5\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A\Rightarrow B\Rightarrow C$ ② $A\Rightarrow C\Rightarrow B$ ③ $B\Rightarrow A\Rightarrow C$
④ $B\Rightarrow C\Rightarrow A$ ⑤ $C\Rightarrow A\Rightarrow B$

Chapter I Advanced Lecture

SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 동치 명제

명제가 참이면 대우도 참이다. 이 단순한 논리가 복잡한 문장을 다룰 때는 단순하지 않게 느껴지곤 한다.
다음 문장을 참인 명제라 가정하고, 대우를 생각해 보자.

혼나야만 공부한다.
배고파야만 밥을 먹는다.

많은 독자들은 다음과 같이 대답하였을 것이다.

공부하지 않으면 혼나지 않는다.
밥을 먹지 않으면 배고프지 않다.

이 문장들은 어딘가 이상하다. 직관적으로 생각해 볼 때, 위 문장보다는 다음 문장이 본래의 명제와 그 뜻이 통한다.

공부한다면 혼났던 것이다.
밥을 먹으면 배고팠던 것이다.

왜 이런 일이 생긴 것일까? 'q이면 p이다.'와 'q이어야만 p이다.'는 서로 다른 뜻이기 때문이다. '아' 다르고 '어' 다르다는 우리 속담이 있다. 이처럼 '만(only)'이라는 음절 하나가 추가되면 문장의 뜻이 완전히 달라진다. 표를 통해 비교해 보자.
조건 p의 진리집합을 P, 조건 q의 진리집합을 Q라 할 때, 다음이 성립한다.

	q이면 p이다.($q \Longrightarrow p$)	q이어야만 p이다.
진리집합 사이의 관계	$Q \subset P$	$P \subset Q$
직관적인 의미	q는 p이기 위한 충분조건이다.	q는 p이기 위해 필요한 조건 중 하나일 뿐이다. 즉, q는 p이기 위한 충분조건이 아닌 필요조건이다.

01. 조건문과 반론

모든 명제는 참, 거짓을 명확히 판정할 수 있다. 그런데 다음과 같은 조건문을 생각해 보자.

만일 비가 오면 그 콘서트는 취소될 것이다.

이 문장은 경우에 따라서 참일 수도 있고, 거짓일 수도 있다. 예를 들어 비가 오지 않았고 그 콘서트가 취소되지도 않았다면 이 문장은 참이 된다. 반면에 비가 오는데 그 콘서트가 취소되지 않았다면, 이 문장은 거짓이 된다. 이렇게 조건문은 경우에 따라서 참이 될 수도 있고 거짓이 될 수도 있다.

만약 우리가 주어진 상황이 어떤 경우인지를 알 수 있고 그 상황이 변하지 않는다면 그 문장의 참, 거짓을 쉽게 판단할 수 있겠지만, 안타깝게도 현실은 그렇게 단순하지 않다. 그러므로 모든 가능한 경우를 고려하여 그 명제가 어느 경우에 참이 되는지 혹은 거짓이 되는지 알아보는 작업은 꽤 쓸모가 있다.
이를 위해 우리는 **진리표**(truth table)라는 것을 이용한다. 진리표란 어떠한 명제가 **참 또는 거짓으로 해석될 수 있는 모든 가능한 경우를 일정한 규칙에 맞게 나타낸 표**를 말한다.

그럼, 먼저 명제 'p 그리고 q'와 'p 또는 q'의 진리표에 대해 알아보자.
'p **그리고** q'와 같은 명제는 검토해야 할 논리적 가능성이 4가지가 있다.

① p가 참이고 q가 참인 경우 ⇨ 'p 그리고 q'는 참
② p가 참이고 q가 거짓인 경우 ⇨ 'p 그리고 q'는 거짓
③ p가 거짓이고 q가 참인 경우 ⇨ 'p 그리고 q'는 거짓
④ p가 거짓이고 q가 거짓인 경우 ⇨ 'p 그리고 q'는 거짓

즉, p와 q가 모두 참이어야만 명제 'p 그리고 q'가 참이 될 수 있다. 따라서 진리표는 다음과 같다.

내신 · 모의고사 대비 TEST

숨마쿰라우데®

[수학 (하)]

정답은 ➡ 본책의 해설지에서
해설은 ➡ 당사 홈페이지에서
확인하실 수 있습니다.
www.erumenb.com

01 집합의 뜻과 포함 관계

기본 Exercises

01 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 30의 양의 약수의 모임
② 10 이하의 자연수의 모임
③ 0에 가까운 수의 모임
④ 백두산보다 낮고 한라산보다 높은 산의 모임
⑤ 짝수의 모임

02 다음 중 원소의 개수가 가장 많은 집합은?

① $\{4\}$
② $\{1,\ 3,\ 5\}$
③ $\{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$
④ $\{x \mid x$는 10 이하의 3의 양의 배수$\}$
⑤ $\{x \mid x$는 7의 양의 약수$\}$

03 두 집합

$A=\{a+3,\ a^2-6\},\ B=\{3,\ 9-a\}$

에 대하여 $A=B$일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

04 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{2,\ 4,\ 6\})=4$
② $A\subset B$이면 $n(A)<n(B)$이다.
③ $n(A)=0$이면 $A=\{\varnothing\}$이다.
④ $n(A)=n(B)$이면 $A=B$이다.
⑤ $n(\{1\})=n(\{\varnothing\})=1$

05 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

06 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고, 3, 5는 원소로 갖지 않는 집합의 개수를 구하여라.

01 실수 전체의 집합 R의 두 부분집합

$$A=\{x\,|\,x^2-x-12\le 0\},\ B=\{x\,|\,x<a \text{ 또는 } x>b\}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cup B=R$
(나) $A-B=\{x\,|\,-3\le x\le 1\}$

두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

02 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4, 5\}$에 대하여

$$X\cup A=X,\ X\cap B^C=X$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오.

03 자연수 n에 대하여

$A_n=\{x\,|\,x$는 n 이하의 소수$\}$,
$B_n=\{x\,|\,x$는 n의 양의 약수$\}$

일 때, 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A_3\cap B_4=\{2\}$
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $A_n\subset A_{n+1}$이다.
ㄷ. 두 자연수 m, n에 대하여 $B_m\subset B_n$이면 m은 n의 배수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 두 집합

$$A=\{x\,|\,(x-1)(x-26)>0\},$$
$$B=\{x\,|\,(x-a)(x-a^2)\le 0\}$$

에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5