SUMMA CUM LAUDE

트튼한 개념! 흔들리지 않는 실력!

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

수학 I

쉽고 상세하게 설명한 개념 기본서의 결정판!

기초–기본–발전–심화 학습을 위한 체계적인 문제 구성

사고력을 넓히는 심화 연계 학습

2019 새교육과정

SUMMA CUM LAUDE

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

수학 Ⅰ

이룸이앤비
Education & Books

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

INTRODUCTION

[이 책을 펴내면서]

새로운 교육과정에 맞추어 [숨마쿰라우데 수학 I]이 출간되었습니다.
이번 개정에서도 한결 같이
어떻게 하면 내용을 효과적으로 전달할 수 있을까?
어떻게 하면 학생들이 보다 쉽게 이해할 수 있을까?
많은 고민들을 하면서 그 노력의 산물들을 이 책에 고스란히 담았습니다.

천편일률적인 내용과 형식적인 기존의 교재들로는 학생들이 더 이상
효과적인 공부를 할 수 없다고 판단하여, [숨마쿰라우데 수학 I]에서는
학생들에게 정말 필요하고, 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록
형식적인 설명이 아닌 자세하고 쉬운 개념 설명을 위주로 구성하였습니다.
기본 원리의 이해부터 심화 항목의 이해까지 이 책 한 권으로 모두 마스터할 수 있도록,
어느 것 하나 빼놓지 않은 완벽한 설명을 하기 위해 노력했고
양질의 문제를 수록하기 위해 오랜 시간 고심하였습니다.
그 결과 [숨마쿰라우데 수학 I]에는 다른 책에서 볼 수 없는 상세한 설명과 더불어
꼭 필요한 예제, 양질의 문제들, 선배들의 노하우 등이 다양하게 수록되었습니다.
더 나아가 **Advanced Lecture**와 **MATH *for* ESSAY**에서는 본문과 연결된 더 높은 차원의 내용을 다루어
대학별 고사, 구술 면접 등에도 실질적인 도움이 될 수 있도록 하였습니다.

세계적인 피겨스케이팅 선수 김연아는 1년에 1만 회가 넘는 점프 연습을 하였고,
골프 선수 최경주는 하루에 골프 공을 1000개 이상 치며 연습을 했다고 합니다.
수학 실력도 마찬가지입니다.
누구나 끈질기게 연습하다 보면 분명 정상에 오를 수 있을 것입니다.
피나는 노력 끝에 얻은 결과만큼 달콤한 것은 없습니다.
[숨마쿰라우데 수학 시리즈]와 함께 최고의 결실을 거두기를 진심으로 바랍니다.

– 저자 일동 –

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]

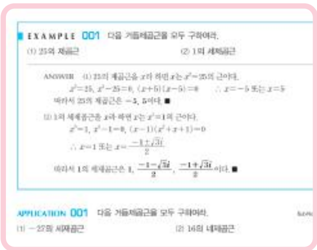

01 거듭제곱과 거듭제곱근

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

01 개념 학습

수학 학습의 기본은 개념에 대한 완벽한 이해입니다. 단원을 개념의 기본이 되는 소단원으로 분류하여, 기본 개념을 확실하게 이해할 수 있도록 설명하였습니다. 〈공식의 정리〉와 함께 〈공식이 만들어진 원리〉, 학습 선배인 〈필자들의 팁〉, 문제 풀이시 〈범하기 쉬운 오류〉 등을 설명하여 확실한 개념 정립이 가능하도록 하였습니다.



02 EXAMPLE & APPLICATION

소단원에서 공부한 개념을 적용할 수 있도록 가장 적절한 〈EXAMPLE〉을 제시하였습니다. 다양한 접근 방법이나 추가 설명을 통해 개념을 확실하게 이해하고 넘어가도록 하였습니다. EXAMPLE에서 익힌 방법을 적용하거나 응용해 봄으로써 개념을 탄탄하게 다질 수 있도록 APPLICATION을 제시하였습니다.

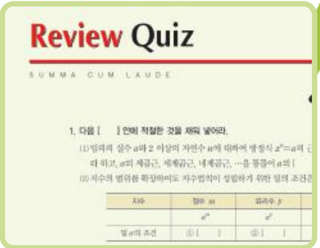
03 기본예제 & 발전예제

탄탄한 개념이 정리된 상태에서 본격적인 수학 단원별 유형을 익힐 수 있습니다. 대표적인 유형 문제를 〈기본예제〉와 〈발전예제〉로 구분해 풀이 GUIDE와 함께 그 해법을 보여 주고, 같은 유형의 〈유제〉 문제를 제시하여 해당 유형을 완벽하게 연습할 수 있습니다. 또, 〈Summa's advice〉에 보충설명을 제시하여 실수하기 쉬운 사항, 중요한 추가적인 설명을 덧붙여 해당 문항 유형에 철저하게 대비할 수 있도록 하였습니다.

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

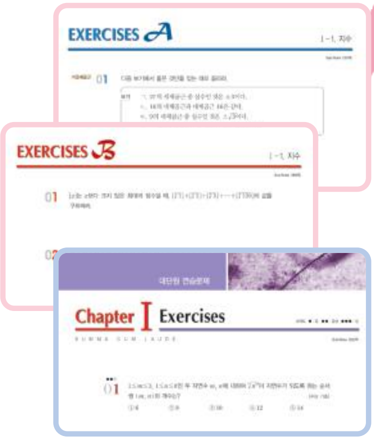
STRUCTURE

숨마쿰라우데® [수학 I]



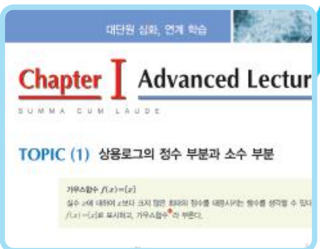
04 중단원별 Review Quiz

소단원으로 나누어 공부했던 중요한 개념들을 중단원별로 모아 괄호 넣기 문제, 참 · 거짓 문제, 간단한 설명 문제 등을 제시하였습니다. 이는 중단원별로 중요한 개념을 다시 한번 정리하여 전체를 보는 안목을 유지할 수 있도록 해 줍니다.



05 중단원별, 대단원별 EXERCISES

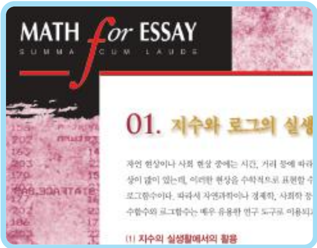
이미 학습한 개념과 유형문제들을 중단원과 대단원별로 테스트하도록 하였습니다. 〈난이도별〉로 A, B단계로 문항을 배치하였으며, 내신은 물론 수능 시험 등에서 출제가 가능한 문제들로 구성하여 정확한 자신의 실력을 측정할 수 있습니다. EXERCISES를 통해 부족한 부분을 스스로 체크하여 개념 학습으로 피드백하면 핵심 개념을 보다 완벽히 정리할 수 있습니다.



06 Advanced Lecture(심화, 연계 학습)

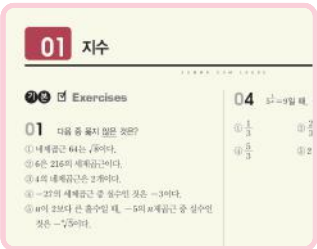
본문보다 더욱 심화된 내용과 앞으로 학습할 상위 단계와 연계된 내용을 제시하고 있습니다. 특히, 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 설명하여 깊이 있는 학습으로 수학 실력이 보다 향상될 수 있도록 하였습니다.

[이 책의 구성과 특징]



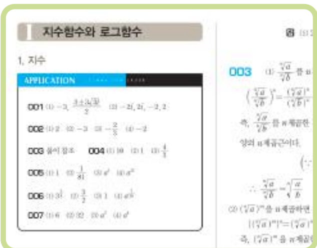
07 MATH for ESSAY

고2 수준에서 연계하여 공부할 수 있는 수리 논술, 구술에 관련된 학습 사항을 제시하였습니다. 앞의 심화, 연계 학습과 더불어 좀 더 수준 있는 수학을 접하고자 하는 학생들을 위해 깊이 있는 수학 원리 학습은 물론 앞으로 입시에서 강조되는 〈수리 논술, 구술〉에도 대비할 수 있도록 하였습니다.



08 내신 · 모의고사 대비 TEST

수학 공부에서 많은 문제를 접하여 적응력을 키우는 것은 원리를 이해하는 것과 함께 중요한 수학 공부법 중 하나입니다. 이를 위해 별도로 단원별 우수 문제를 〈내신 · 모의고사 대비 TEST〉를 통해 추가로 제공하고 있습니다. 단원별로 자신의 실력을 측정하거나, 중간 · 기말 시험 및 각종 모의고사에 대비하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.



09 SUB NOTE – 정답 및 해설

각 문제에 대한 좋은 해설은 문제풀이 만큼 실력 향상을 위해 필요한 요소입니다. 해당 문제에 대해 가장 적절하고 쉬운 풀이 방법을 제시하였으며, 알아두면 도움이 되는 추가적인 풀이 방법 역시 제시하여 자학자습을 위한 교재로 손색이 없도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅰ. 지수함수와 로그함수

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

숨마쿰라우데® [수학 I]

CHAPTER Ⅱ. 삼각함수

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

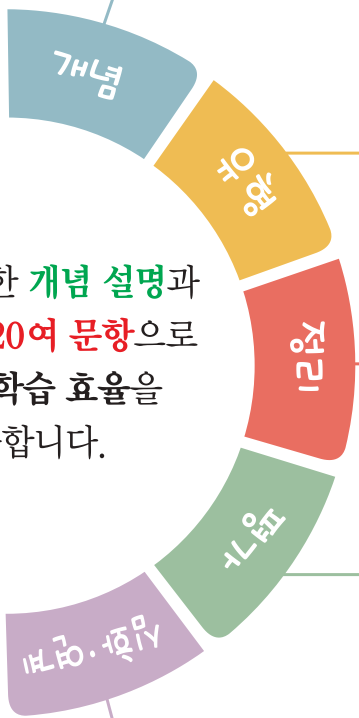
[이 책의 차례]

CHAPTER Ⅲ. 수열

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STUDY SYSTEM

[수학 학습 시스템]



쉽고 상세한 **개념 설명**과
엄선된 **1220여 문항**으로
최고의 학습 효율을
제공합니다.

단원 개념 학습 단계

EXAMPLE
APPLICATION

필수 유형 학습 단계

기본, 발전예제
유제

단원 학습 정리 단계

중단원별 Review Quiz
중단원별 EXERCISES
대단원별 Exercises

최종 실력 테스트 단계

내신 · 모의고사 대비 TEST

심화, 연계 학습 단계

Advanced Lecture
MATH for ESSAY

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

수학 공부법 특강

상위 1%가 되기 위한 효율적 학습법

www.erumenb.com

미국의 유명한 수학자이자 철학자인 찰스 샌더스 퍼스는 그의 저서 「The Fixation of Belief」에서 지식의 습득 방법을 4가지로 분류했다.

❶ 고집의 방법(method of tenacity)

자신이 가지고 있는 가치 기준으로 지식을 받아들인다. 문제는 그 내용의 진실됨을 설명할 수 없다는 점과 그 지식을 산출한 근거가 무엇인지 알 수 없다는 점이다.

❷ 권위의 방법(method of authority)

신이나 학자처럼 권위가 있는 자들의 말에 의존하여 지식을 받아들인다. 문제는 누구의 권위가 최고의 권위인지 확인할 수 없고, 그 해석이 맞는지도 확인하기 힘들다.

❸ 선험적 방법(a priori method)

개인이 직접 경험한 것들에 근거하여 믿게 되는 지식이다. 문제는 자신의 지식 수준에 기대어 판단이나 행위를 하는 경향이 있다.

❹ 과학적 방법(scientific method)

관찰, 비판, 논증을 통해 자기 수정적인 지식 체계를 구성하는 방법이다. 합리적 토론이 가능하고, 이성적 대화와 관찰을 통해 가장 진리에 근접한 명제의 집합을 구성한다.

수학적 지식은 위 네 가지 방법 중 어떤 방법으로 학습되어야 할까?

많은 시간을 들여 수학을 공부하고 또 수학에 대해 이것저것 많이 아는 것 같은데 정작 시험에서 실력 발휘를 하지 못하는 친구들을 볼 수 있다. 이는 수학적 지식을 스스로 관찰, 비판, 논증을 통해 습득하고 수정해 나아가지 않고, 어떤 절대적인 사실(공식)이나 타인의 풀이를

단순히 암기함으로써(해설 암기) 비효율적인 공부법을 선택했기 때문이다.
수학은 다른 교과목과 달리 단순한 사실을 아는 것은 수학 실력이 되어주지 못한다. 정리된 개념과 공식을 암기하거나, 어려운 문제의 해설을 읽고 이해하는 순간은 마치 모르던 것을 알게 된 것 같고 이전의 나와 달리 발전된 것 같지만, 이는 맛있고 몸에 좋지 않은 인스턴트 학습법일 뿐이다.

수학 문제가 잘 이해되지 않거나 어떤 방식으로 풀어야 할지 모르겠으면, 문제를 다양한 방법으로 관찰하고 문제 상황에 알맞은 예를 구체적으로 생각해 보거나, 스스로의 사고 과정을 비판해 보기도 하며 탐구해야 할 것이다. 이런 탐구 과정은 당장 달콤한 수학 실력의 발전으로 드러나지는 않지만 오랜 시간에 걸쳐 결국 수학을 완전히 이해하게 하는 핵심 역량이 되어줄 것이다. 물론 문제가 너무 어렵다면 의미 있는 탐구를 할 수 없으므로 적절한 난이도의 문제를 선택해서 고민해야 할 것이다.

알 파치노가 주연으로 나온 마틴 브레스트 감독의 영화 "여인의 향기(Scent of a Woman)"에는 다음과 같은 명대사가 나온다.

I always knew what the right path was... But I never took it,
because It was too damn hard.

(나는 언제나 바른 길을 알고 있었어. 하지만 난 그 길을 가지 않았지.
왜냐하면 너무 어려워서야.)

마치 많은 학생들이 지금껏 수학을 바라본 느낌을 대변하는 문장처럼 들리지 않는가...
많은 학생이 고2 수학 공부를 어떻게 해나가야 할지 많이 고민하고 있으리라 충분히 짐작된다. 또한 고2부터 본격적으로 수학이 좀 더 어렵게 느껴지는 시기라고 할 수 있다.
아직 수능까지 시간이 많이 남았다. 늦었다고 생각하지 말자. 본격적인 시작이므로 그동안 수학 공부에 대해 애써 어려운 과정을 피해 왔다면 지금부터는 맞서 보자. 그게 바른 길로 접어드는 시작점이다. 아울러 수학을 공부하는 어쩌면 당연한 자세 몇 가지를 소개하니 도움이 되길 바란다.

1 메타인지적 지식을 키워라.

'메타인지적 지식'이란 무언가를 배우거나 새로운 일을 할 때 내가 아는 것과 모르는 것을 정확하게 파악하고 행동하는 능력을 말한다. 예를 들어, 특정 단원의 성적이 안 좋을 때 스

스로 이유를 찾고 어떻게 문제를 극복할 것인지 계획을 세워 실천하는 능력이다.

당장 문제를 많이 푸는 것은 중요하지 않다. 본인의 공부법을 점검해 보고 자신에 맞는 효율적인 공부법을 찾길 권한다.

2 배우지 않은 친구에게 알려줄 수 있을 만큼 공부해라.

얼마나 공부해야 잘 안다고 할 수 있을까?

똑같은 내용을 두 번, 세 번 본다고 더 잘 알게 되는 것은 아니다. 똑같은 문제를 두 번, 세 번 푼다고 더 잘 알게 되는 것도 아니다. 어떤 수학적 개념이나 문제를 다시 돌아보지 않아도 될 만큼 잘 안다는 것은, 이미 내 안에 충분한 탐구의 경험과 그 경험의 결과가 정리되어 있어서 배우지 않은 친구에게 알려줄 수 있다는 것과 같다. 누군가에게 수학적 개념을 설득력 있게 설명하기 위해서는 개념의 앞뒤 관계나 개념을 둘러싸고 있는 이야기들과 좋은 예제들을 알아야 하고, 문제를 설명하기 위해서는 그 문제에서 묻고자 하는 핵심질문과 질문의 답을 얻기 위한 조건들을 자연스럽게 분석할 수 있어야 한다. 이런 일련의 과정을 할 수 있다면 비로소 충분히 공부했다고 볼 수 있다.

3 공부한 내용을 정리하는 한 방법으로 강의록을 써 보자.

내가 공부한 내용을 누군가에서 설명한다면 어떤 방식으로 구성하고 어떻게 제시할 것인지를 생각하면서 정리하는 것이다. 단순히 공부한 내용을 기록하는 과정은 공부한 내용들 간의 유기적인 관계가 간과되기 쉬운데 다시 설명할 것을 목적으로 필기한다면 이러한 유기적 관계가 내용 정리의 주인공이 된다. 다시 한번 말하지만 수학 공부에서 중요한 것은 단순한 사실의 나열이 아니라 나열된 사실들 간의 관계와 그 사실을 배우는 이유가 되어야 할 것이다.

4 끊임없이 질문하라.

수학을 잘하는 학생들 중에 질문이 없는 학생은 있지만, 수학 질문이 많은 학생들 중에 수학을 못하거나 싫어하는 학생은 없다.

수학은 질문을 통해 공부하는 학문이다.

질문은 잘 알고 있는 사실이나, 아예 모르는 사실들에서 생겨나지 않는다. 내가 아는 것을 바탕으로 생각했을 때 결론을 잘 내릴 수 없는 것들이 질문의 대상이 된다. 질문을 한다는

것은 무언가 알고자 하는 의지가 있다는 것이고 이는 자연스럽게 수학적 개념의 탐구로 연결된다. 결국 내가 가진 궁금증에 집중하는 것이 수학을 공부하는 비법인 것이다.

5 어려운 문제일 것이라는 선입견을 버려라.

대부분의 학생들은 복잡해 보이는 문장제 문제가 등장하면 읽기부터 포기하는 경우가 많다. 복잡해 보이는 문제는 반드시 어려운 문제일 것이라는 선입견을 버리자. 문장만 길 뿐 단순한 원리로 풀어지는 문제도 많기 때문이다. 모의고사, 대학수학능력시험 등에서는 결코 교과과정 이외의 내용이 출제되지 않는다. 따라서 간단한 식으로 표현될 수 있는 내용을 여러 정보와 섞거나 혹은 긴 문장으로 식을 숨기는 형식으로 문제가 출제되는 것이다. 이러한 문제에 익숙하지 않거나 두려움을 느낀다면 가장 먼저 문제에 주어진 정보를 모두 따로 떼어 적어 놓고 시작하는 것이 좋다. 출제자는 정보를 찾지 못할 정도로 문제를 복잡하게 만들지는 않는다. 여러분은 충분히 정보를 뽑을 수 있다. 일단 정보를 빼내고 나면 문제의 길이에 비하여 어이없게 쉬운 문제일 수도 있다. 문제가 길다고 해서 두려움을 가질 필요는 전혀 없다!

학습의 기본은 모방이지만, 모방을 통해 계산능력, 이해능력, 추론능력, 문제해결능력 등을 키우는 데에는 한계가 있다. 학습은 처음에는 개념과 예제 등을 모방하는 것으로 시작하여 결국에는 스스로 탐구하는 능력을 키우는 것을 목표로 해야 할 것이다.
「숨마쿰라우데 수학 기본서」로 책과 대화하는 자세로 공부해 나아간다면 수학을 탐구하는 과정을 통해 꼭 필요한 수학적 능력을 키울 수 있을 것이라 필자는 자신한다.

더운 여름날 교내 체력장이나 오래달리기 등 10분 이상 운동장을 뛴 다음
시원한 물을 마셔 본 적이 있는가?

평소에 습관적으로 마시는 물과 오랜 갈증과 더위 끝에 마시는 물은 아주 다른 것이 된다.
「숨마쿰라우데 수학 기본서」로 제대로 된 공부를 하여 수학 갈증을 해소하는 시원한 물을 마셔 보자!

CHAPTER I
지수함수와 로그함수

숨마쿰라우데®
[수학 I]

INTRO to Chapter Ⅰ
지수함수와 로그함수

SUMMA CUM LAUDE

본 단원의 구성에 대하여...

Ⅰ. 지수함수와 로그함수	1. 지수	01 거듭제곱과 거듭제곱근 02 지수의 확장 • Review Quiz • EXERCISES
	2. 로그	01 로그의 뜻과 성질 02 상용로그 • Review Quiz • EXERCISES
	3. 지수함수	01 지수함수의 뜻과 그래프 02 지수방정식과 지수부등식 • Review Quiz • EXERCISES
	4. 로그함수	01 로그함수의 뜻과 그래프 02 로그방정식과 로그부등식 • Review Quiz • EXERCISES
	• **대단원 연습문제** • **대단원 심화, 연계 학습** TOPIC (1) 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 • **논술, 구술 자료** 01. 지수와 로그의 실생활에서의 활용	

일상생활에서 흔히 접할 수 있는 지수와 로그는 어떠한 사회 · 과학적인 현상을 설명하는 수학적인 도구이다. 아주 크거나 작은 수, 복잡한 수를 지수와 로그를 사용하여 간편하게 표현함으로써 물리적인 여러 현상을 쉽게 설명할 수 있게 되었다.

지수, 곱셈의 반복

지수(exponent)는 긴 곱셈을 간단하게 표기하기 위한 약속이다.

$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{번}}=a^n$과 같이 반복해서 나타나는 곱셈을 지수로 표현하기로 약속했었고, 이것이 바로 자연수인 지수의 정의이다.

01 거듭제곱과 거듭제곱근

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

1 거듭제곱과 거듭제곱근

(1) 실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고 a^n으로 나타낸다.
이때 a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라 한다.

(2) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라 한다. 이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

2 a의 n제곱근 중 실수인 것

(1) n이 홀수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 오직 하나뿐이다.
이것을 $\sqrt[n]{a}$로 나타내고, 'n제곱근 a'라 읽는다.

(2) n이 짝수이고 $a>0$일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 하나씩 있다.
이 둘을 각각 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

3 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

1 거듭제곱과 거듭제곱근

실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고 a^n으로 나타낸다. 이때 a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다. **INTRO**에서 확인한 것처럼 자연수인 지수에 대하여 다음이 성립한다.

지수가 자연수일 때의 지수법칙

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $(a^m)^n=a^{mn}$ ③ $(ab)^n=a^n b^n$

④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b\neq0$) ⑤ $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$ (단, $a\neq0$)

한편 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉

방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x

$$x^n = a$$

a의 n제곱근 ← x / a → x의 n제곱

를 a의 n**제곱근**(radical root)이라 한다. 이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

거듭제곱근이 가지고 있는 가장 근본적인 성질은 바로 방정식의 근이라는 점이다. 이를 꼭 기억하자.

EXAMPLE 001 다음 거듭제곱근을 모두 구하여라.

(1) 25의 제곱근 (2) 1의 세제곱근

ANSWER (1) 25의 제곱근을 x라 하면 x는 $x^2=25$의 근이다.

$x^2=25,\ x^2-25=0,\ (x+5)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=5$

따라서 25의 제곱근은 $\mathbf{-5,\ 5}$이다. ■

(2) 1의 세제곱근을 x라 하면 x는 $x^3=1$의 근이다.

$x^3=1,\ x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근은 $\mathbf{1,\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$이다. ■

APPLICATION 001 다음 거듭제곱근을 모두 구하여라. Sub Note 002쪽

(1) -27의 세제곱근 (2) 16의 네제곱근

2 a의 n제곱근 중 실수인 것

복소수 범위에서 n차방정식은 n개의 근을 갖는다는 대수학의 기본정리를 따르면

방정식 $x^n=a$는 복소수 범위에서 n개의 근을 갖는다.

a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근과 같으므로 a의 n제곱근도 복소수 범위에서 n개가 있다. 이 n개 중에서 우리는 실수인 것을 주로 다루는데,

n이 홀수인지, 짝수인지 그리고 a가 양수인지, 0인지, 음수인지에 따라

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 조금씩 달라진다.

기 본 예 제 *거듭제곱근*

001

다음 중 옳은 것은? (정답 2개)

① 125의 세제곱근은 5뿐이다.

② -8의 세제곱근 중 실수인 것은 없다.

③ -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

④ n이 짝수일 때, -9의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이다.

⑤ n이 홀수일 때, 7의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

GUIDE 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x임을 이용한다.

SOLUTION

① 125의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=125$이므로

$$x^3-125=0,\ (x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$$

즉, 125의 세제곱근은 5, $\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$의 3개이다.

② -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$$x^3+8=0,\ (x+2)(x^2-2x+4)=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{3}i$$

즉, -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

③ -16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-16$이므로

$$x^4+16=0,\ (x^2+4i)(x^2-4i)=0$$

이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

④ -9의 n제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n=-9$를 만족시키는 실수 x이다.

이때 n이 짝수이므로 실수 x는 존재하지 않는다.

즉, n이 짝수일 때, -9의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

⑤ 7의 n제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n=7$을 만족시키는 실수 x이다.

이때 n이 홀수이므로 실수 x는 $\sqrt[n]{7}$의 1개이다.

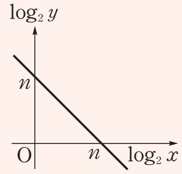
따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다. ■

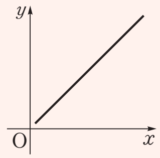
유제 **001-1** Sub Note 028쪽

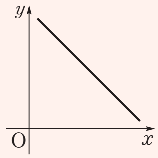
-216의 세제곱근 중 실수인 것을 a, $\sqrt{81}$의 네제곱근 중 음의 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값을 구하여라.

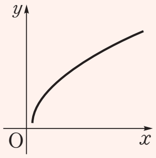
발전예제 **로그의 성질의 활용(2)**

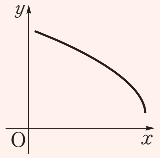
011 $\log_2 x$와 $\log_2 y$ 사이의 관계가 오른쪽 그래프와 같을 때, 다음 중 x와 y 사이의 관계를 그래프로 바르게 나타낸 것은? (단, $n>0$)

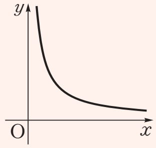


①


②


③


④


⑤


GUIDE 밑이 같은 로그이므로 로그의 성질을 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

SOLUTION

주어진 그래프에서 $\log_2 x$와 $\log_2 y$ 사이에는

$$\log_2 y = -\log_2 x + n \ (\text{단, } n>0)$$

인 관계가 있다.

이 식에서 log가 사라지도록 식을 차근차근 정리해 보자.

$\log_2 y = -\log_2 x + n$에서 $\quad \log_2 y = \log_2 x^{-1} + \log_2 2^n$

$$\log_2 y = \log_2 (x^{-1} \cdot 2^n),\ \log_2 y = \log_2 \frac{2^n}{x}$$

$$\therefore\ y = \frac{2^n}{x} \ (\text{단, } n>0)$$

이때 $\log_2 x$와 $\log_2 y$에서 진수의 조건에 의하여 $\quad x>0,\ y>0$

따라서 x와 y 사이의 관계를 그래프로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다. ■

유제 Sub Note 031쪽

011-1 자연수 k에 대하여 $f(k)$가 0 또는 1이고

$$\log_7 2 = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \frac{f(3)}{2^3} + \frac{f(4)}{2^4} + \cdots$$

일 때, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 차례대로 나열하여라.

Review Quiz

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 067쪽

1. 다음 [ ] 안에 적절한 것을 채워 넣어라.

(1) 임의의 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 방정식 $x^n=a$의 근을 a의 [ ]이라 하고, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 [ ]이라 한다.

(2) 지수의 범위를 확장하여도 지수법칙이 성립하기 위한 밑의 조건은 다음과 같다.

지수	정수 m	유리수 p	실수 x
	a^m	a^p	a^x
밑 a의 조건	① [ ]	② [ ]	③ [ ]

2. 다음 문장이 참(true) 또는 거짓(false)인지 결정하고, 그 이유를 설명하거나 적절한 반례를 제시하여라.

(1) a의 n제곱근과 n제곱근 a는 같다.

(2) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근은 존재하지 않을 수도 있다.

(3) 정수 $n\,(n\geq 2)$에 대하여 $\sqrt[n]{0}$은 항상 0이다.

(4) $a^m=a^n\ (a\neq 0)$이면 $m=n$이다.

3. 다음 물음에 대한 답을 간단히 서술하여라.

(1) 다음 과정 중에서 처음으로 등호가 잘못 사용된 부분을 찾고, 그 이유를 설명하여라.

$$1\underset{①}{=}\sqrt{1^6}\underset{②}{=}\sqrt{(-1)^6}\underset{③}{=}\sqrt{\{(-1)^3\}^2}\underset{④}{=}\{(-1)^3\}^{2\times\frac{1}{2}}\underset{⑤}{=}\{(-1)^3\}^1=(-1)^3=-1$$

(2) $a\neq 0$일 때, $a^0=1$이라 정의하는 이유를 설명하여라.

EXERCISES A

Sub Note 067쪽

거듭제곱근 **01** 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. 27의 세제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.
ㄴ. 16의 네제곱근과 네제곱근 16은 같다.
ㄷ. 9의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{3}$이다.
ㄹ. -343의 세제곱근 중 실수인 것은 하나뿐이다.

거듭제곱근의 성질 **02** $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\sqrt[k]{3}$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하여라.

거듭제곱근의 대소 비교 **03** 세 수 $A=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $B=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$, $C=\sqrt[6]{6\sqrt{6}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$　② $A<C<B$　③ $B<A<C$
④ $C<A<B$　⑤ $C<B<A$

지수법칙 **04** $2^x=\dfrac{12}{5}$, $2^y=\dfrac{20}{3}$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.

지수법칙 **05** 1이 아닌 양수 a에 대하여 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{n}{m}}$일 때, $m+n$의 값을 구하여라.
(단, m과 n은 서로소인 자연수)

Sub Note 069쪽

01 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, $[\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+[\sqrt[4]{3}]+\cdots+[\sqrt[4]{120}]$의 값을 구하여라.

02 $2!\times3!\times4!\times5!\times6!\times7!\times8!\times9!\times10!=2^a\times3^b\times5^c\times7^d$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값은?

① 44 ② 55 ③ 66 ④ 77 ⑤ 88

03 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 골라라.

보기
ㄱ. -1의 세제곱근은 1개이고, 1의 네제곱근은 2개이다.
ㄴ. $4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{2}}$
ㄷ. $a>1$일 때, $(\sqrt{a})^{a\sqrt{a}}=(a\sqrt{a})^{\sqrt{a}}$인 a의 값은 3뿐이다.

04 $a\neq0$일 때, $\dfrac{a^5+a^4+a^3+a^2+a}{a^{-10}+a^{-9}+a^{-8}+a^{-7}+a^{-6}}$를 간단히 한 것은?

① a^{15} ② a^{13} ③ a^{11}
④ $a^{10}+a^{-10}$ ⑤ $a^{15}-a^7$

05 $\dfrac{3^9}{3^{-1}+3^{-3}}=k\cdot3^n$이고 $1<k<3$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

Chapter I Exercises

난이도 ■ : 중 ■■ : 중상 ■■■ : 상

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 090쪽

■■□

01 $1 \le m \le 3$, $1 \le n \le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는? [수능 기출]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

■■□

02 $f(x)=\sqrt[3]{12x}$, $g(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{12}}$가 모두 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 x의 값을 α라 할 때, $f(\alpha)+g(\alpha)$의 값을 구하여라.

■■□

03 $a^{2x}=5+2\sqrt{6}$일 때, $\dfrac{a^{4x}-a^{-4x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

■■■

04 자연수 N과 서로 다른 세 소수 a, b, c 및 0이 아닌 네 실수 p, q, r, s에 대하여 $a^p=b^q=c^r=N^s$, $\dfrac{1}{2s}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}$이 성립할 때, N의 양의 약수의 개수를 구하여라.

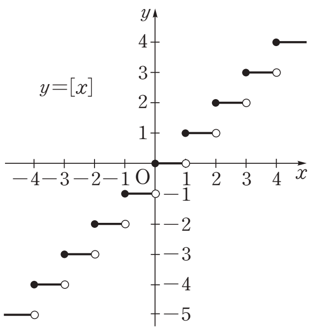
Chapter I Advanced Lecture

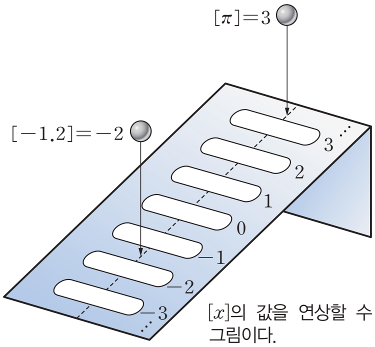
SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

가우스함수 $f(x)=[x]$

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 대응시키는 함수를 생각할 수 있다. 이 함수를 $f(x)=[x]$로 표시하고, 가우스함수[1]라 부른다.





$[x]$의 값을 연상할 수 있는 그림이다.
구슬이 바로 아래 정수인 구멍에 빠지는 그림인데 이 구멍의 값이 $[x]$의 값이 된다.

간단히 예를 들어 보면 $[1.23]=1$, $[-1.23]=-2$이다.

쉽게 설명하자면, 가우스함수 $[x]$는 실수 x를 정수 부분과 소수 부분으로 쪼개고, 소수 부분을 버림하는 함수이다. 이때 한 가지 주의해야 할 점이 있는데, **소수 부분은 항상 0보다 크거나 같고 1보다 작은 수**라는 점이다.

예를 들어 $-1.7=-1+(-0.7)$은 -1.7을 정수 부분과 소수 부분으로 쪼갠 것이 아니다. 소수 부분의 조건을 고려하여 $-1.7=-2+0.3$으로 쪼개야 바르게 쪼갠 것이다.

---

[1] 이 함수를 가우스함수라 부르는 것은 우리나라를 제외하면 보편적이지 않다. 해외 수학 사이트에서 Gauss function 또는 Gaussian function을 입력하면 결과가 나오지 않거나 전혀 다른 함수가 검색된다. 필자는 이 함수를 버림함수 또는 바닥함수로 부른다.

01. 지수와 로그의 실생활에서의 활용

자연 현상이나 사회 현상 중에는 시간, 거리 등에 따라 증가하거나 감소하는 변화 현상이 많이 있는데, 이러한 현상을 수학적으로 표현할 수 있는 수단이 보통 지수함수와 로그함수이다. 따라서 자연과학이나 경제학, 사회학 등 수학의 여러 응용 분야에서 지수함수와 로그함수는 매우 유용한 연구 도구로 이용되고 있다.

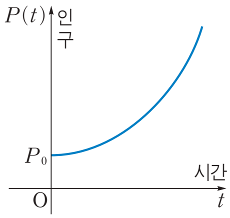
(1) 지수의 실생활에서의 활용

'인구론' 으로 알려진 영국의 경제학자 맬서스는 1798년에 "세계 인구는 기하급수적으로 늘어나는데 식량 생산은 산술급수적으로 늘어나기 때문에 이로 인해 전 세계는 식량난에 닥칠 것이다."라고 말하였다.

맬서스가 제시한 지수성장모형(exponential growth model)은 현재 인구를 P_0, 시각 t에서의 인구를 $P(t)$라 하면, 식은

$$\boldsymbol{P(t)=P_0e^{kt}} \ (e,\ k\text{는 상수})$$

이고, 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 이때 e의 값은 약 2.72이다.

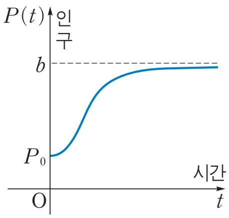


맬서스가 표현한 이 함수는 시간 t를 제외하고 어떤 것도 변수에 영향을 주지 않는 상태에서는 타당하지만 자원이나 기후, 공간 등의 영향을 받는 현실에는 잘 들어맞지 않는다.

이를 보완하기 위해 경제학자들은 인구 성장의 상한선을 설정한 후 미래의 인구를 추정하였는데, 그중 한 예인 벨기에의 수학자 베르휼스트가 제시한 로지스틱 모형(logistic model)의 경우, 식은

$$\boldsymbol{P(t)=\frac{bP_0}{P_0+ae^{-kt}}} \ (a,\ b,\ e,\ k\text{는 상수})$$

이고, 그래프 개형은 오른쪽 그림과 같다.



내신 · 모의고사 대비 TEST

숨마쿰라우데®
[수학 I]

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

Ⅱ. 삼각함수

Ⅲ. 수열

정답은 ➞ 본책의 해설지에서
해설은 ➞ 당사 홈페이지에서
확인하실 수 있습니다.
www.erumenb.com

01 지수

Sub Note 149쪽

기본 ☑ Exercises

01 다음 중 옳지 않은 것은?

① 네제곱근 64는 $\sqrt{8}$이다.
② 6은 216의 세제곱근이다.
③ 4의 네제곱근은 2개이다.
④ -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
⑤ n이 2보다 큰 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[n]{5}$이다.

02 1이 아닌 양수 a에 대하여 $\sqrt[k]{a\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$일 때, 정수 k의 값을 구하여라. (단, $k\geq 2$)

03 다음 중 가장 큰 수는?

① $\sqrt{\sqrt[3]{30}}$ ② $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$ ③ $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$
④ $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$ ⑤ $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$

04 $5^{\frac{1}{x}}=9$일 때, $\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

05 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=3$일 때, $\dfrac{x^2+x^{-2}+7}{x+x^{-1}+2}$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

06 $2^x=5^y=100$인 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

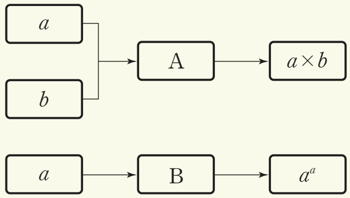
01 2^{14}의 7제곱근 중에서 실수인 것을 a라 하고, a의 네제곱근 중에서 실수인 것을 각각 b, $c\,(b<c)$라 할 때, 다음 중 b의 세제곱근 중에서 실수인 것은?

① $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ ② $\sqrt[3]{-\sqrt{2}}$ ③ $-\sqrt[3]{-\sqrt{2}}$

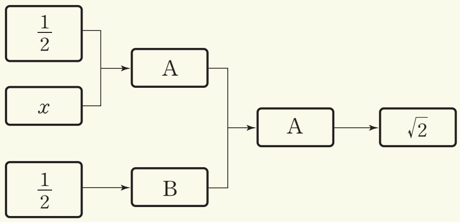
④ $\sqrt{\sqrt[3]{-2}}$ ⑤ $-\sqrt{\sqrt[3]{-2}}$

02 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$, $\sqrt[5]{\dfrac{n}{5}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 $2^a3^b5^c$으로 나타낼 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 자연수)

03 다음 그림과 같이 연산장치 A에 두 양수 a, b를 입력하면 $a\times b$가 출력되고, a를 연산장치 B에 입력하면 a^a이 출력된다.



다음 그림과 같이 연결된 두 연산장치에 실수 x와 $\dfrac{1}{2}$을 입력하였더니 $\sqrt{2}$가 출력되었다. 이때 x의 값은?



① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ 4

④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

튼튼한 **개념!** 흔들리지 않는 **실력!**

숨마쿰라우데 수학Ⅰ

'제대로' 공부를 해야 공부가 더 쉬워집니다!

"공부하는 사람은 언제나 생각이 명징하고 흐트러짐이 없어야 한다. 그러자면 우선 눈앞에 펼쳐진 어지러운 자료를 하나로 묶어 종합하는 과정이 필요하다. 비슷한 것끼리 갈래로 묶고 교통정리를 하고 나면 정보간의 우열이 드러난다. 그래서 중요한 것을 가려내고 중요하지 않은 것을 추려내는데 이 과정이 바로 '종핵(綜核)'이다." 이는 다산 정약용이 주장한 공부법입니다. 제대로 공부하는 과정은 종핵처럼 복잡한 것을 단순하게 만드는 과정입니다. 공부를 쉽게 하는 방법은 복잡한 내용들 사이의 관계를 잘 이해하여 간단히 정리해 나가는 것입니다. 이를 위해서는 무엇보다도 먼저 내용을 제대로 알아야 합니다. 숨마쿰라우데는 전체를 보는 안목을 기르고, 부분을 명쾌하게 파악할 수 있도록 친절하게 설명하였습니다. 보다 쉽게 공부하는 길에 숨마쿰라우데가 여러분들과 함께 하겠습니다.

학습자 수준에 맞도록 공부하는 단계별 구성!

공부에 매진하는 학생들은 모두가 눈앞에 놓인 목표가 있습니다. 예를 들면, '과목의 개념 학습을 확실히 하여 기초를 다지고 싶다', '학교 내신 시험을 잘 보고 싶다', '대학별 논·구술 시험에 대비하고 싶다' 등등……!! 숨마쿰라우데는 이런 각각의 학생들이 원하는 학습 목표에 따른 선택적 학습이 가능합니다. 첫째, 개념 학습 단계에서는 그 어떤 교재보다도 확실하고 자세하게 개념을 설명하고 있습니다. 둘째, 문제 풀이 단계에서는 개념 확인 문제를 비롯하여 내신형과 수능형 문제, 서술형 문제를 실어 수준별 학습이 가능하도록 하였습니다. 셋째, 심화 학습 단계에서는 교과에 대한 보다 심층적인 내용과 대학별 논·구술 예상 문제를 실어 깊이 있는 사고가 가능하도록 하였습니다. 이러한 숨마쿰라우데의 단계별 구성으로 학생들은 자신의 학습 목표에 맞는 부분을 찾아 공부할 수 있습니다. 모든 학습의 기본은 개념의 확실한 이해입니다. 공부하기 쉬운 숨마쿰라우데로 흔들리지 않는 학습의 중심을 잡으세요.

정가 : 17,000원

53410
9 788959 904617
ISBN 978-89-5990-461-7

학습 교재의 새로운 신화! 이룸이앤비가 만듭니다!